

# Analiza složenog stanja naprezanja konzolnog nosača

---

Jaguljnjak, Antonio

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Geotechnical Engineering / Sveučilište u Zagrebu, Geotehnički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:130:431169>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-27**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Geotechnical Engineering - Theses and Dissertations](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
GEOTEHNIČKI FAKULTET

ANTONIO JAGULJNIAK

ANALIZA SLOŽENOG STANJA NAPREZANJA KONZOLNOG NOSAČA

ZAVRŠNI RAD

VARAŽDIN, 2020.

Sazivam članove ispitnog povjerenstva za 17.07.2020. u \_\_\_\_\_ sati.

Obranu ovog rada kandidat će vršiti i pred ispitnim povjerenstvom u Varaždinu.

Varaždin, 03.07.2020.

Predsjednik ispitnog povjerenstva:

Izv.prof.dr.sc. Igor Petrović

### Članovi povjerenstva

- 1) izv.prof.dr.sc. Krešo Ivandić \_\_\_\_\_
- 2) dipl.ing.geot. Filip Dodigović \_\_\_\_\_
- 3) prof.dr.sc. Stjepan Strelec \_\_\_\_\_
- 4) doc.dr.sc. Mario Gazdek \_\_\_\_\_

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

GEOTEHNIČKI FAKULTET

ZAVRŠNI RAD

ANALIZA SLOŽENOG STANJA NAPREZANJA KONZOLNOG NOSAČA

KANDIDAT:

ANTONIO JAGULJNIAK



MENTOR:

Izv.prof.dr.sc. KREŠO IVANDIĆ

NEPOSREDNI VODITELJ:

Dipl.ing.geot. FILIP DODIGOVIĆ

VARAŽDIN, 2020.



Sveučilište u Zagrebu  
Geotehnički fakultet



## ZADATAK ZA ZAVRŠNI RAD

Pristupnik: ANTONIO JAGULJNJAK

Matični broj: 2654 - 2016./2017.

### NASLOV ZAVRŠNOG RADA:

ANALIZA SLOŽENOG STANJA NAPREZANJA KONZOLNOG NOSAČA

- Rad treba sadržati:
1. Uvod
  2. Terminologija i zadaće pri analizi složenog savijanja
  3. Geometrijske osobine presjeka
  4. Čisto savijanje i savijanje poprečnim silama
  5. Koso savijanje
  6. Neutralna linija
  7. Primjeri crtanja dijagrama naprezanja u poprečnom presjeku
  8. Praktični dio
  9. Zaključak
  10. Literatura

Pristupnik je dužan predati mentoru jedan uvezen primjerak završnog rada sa sažetkom. Vrijeme izrade završnog rada je od 45 do 90 dana.

Zadatak zadan: 16.03.2020.

Rok predaje: 03.07.2020.

Mentor:

Izv.prof.dr.sc. Krešo Ivandić

Neposredni voditelj:

Filip Dodigović, dipl.ing.geotehnike

Predsjednik Odbora za nastavu:

Izv.prof.dr.sc. Igor Petrović



## IZJAVA O AKADEMSKOJ ČESTITOSTI

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je završni rad pod naslovom:

Analiza složenog stanja naprezanja konzolnog nosača

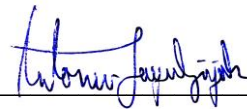
rezultat mog vlastitog rada koji se temelji na istraživanjima te objavljenoj i citiranoj literaturi te je izrađen pod mentorstvom **izv. prof. dr. sc. Krešo Ivandić**.

Izjavljujem da nijedan dio rada nije napisan na nedozvoljen način, odnosno da je prepisan iz necitiranog rada te da nijedan dio rada ne krši bilo čija autorska prava. Izjavljujem također, da nijedan dio rada nije iskorišten za bilo koji drugi rad u bilo kojoj drugoj visokoškolskoj, znanstvenoj ili obrazovnoj ustanovi.

U Varaždinu, 29.6.2020.

Antonio Jaguljnjak

(Ime i prezime)



(Vlastoručni potpis)

## **IZJAVA MENTORA O POSTOTKU SLIČNOSTI ZAVRŠNOG RADA S VEĆ OBJAVLJENIM RADOVIMA**

Izjavljujem i svojim potpisom potvrđujem da je završni rad pod naslovom:

Analiza složenog stanja naprezanja konzolnog nosača

pregledan anti-plagijat programskim paketom PlagScan te da postotak sličnosti cjelovitog završnog rada, s već objavljenim radovima, ne prelazi 20%, kao i da pojedinačni postotak sličnosti završnog rada sa svakom literaturnom referencom pojedinačno ne prelazi 5%.

U Varaždinu, 29.6.2020.

izv. prof. dr. sc. Krešo Ivandić  
(Mentor)



---

(Vlastoručni potpis)

## **Sažetak**

U radu se daje analiza ponašanja konzolnog nosača kod izvedbe zaštitne konstrukcije iskopa građevinske jame.

Na početku rada opisuje se što je to savijanje, koje su to geometrijske osobine presjeka, koje vrste savijanja postoje, također će se pobliže objasniti pojam neutralne linije nosača te crtanje dijagrama naprezanja u poprečnom presjeku.

Nakon teoretskog osvrta slijedi praktični dio koji je izrađen u programu GeoStudio 2012 (Sigma/W). Analiza dobivenih podataka iz spomenutog programa izrađena je u programu Excel iz programskog paketa Microsoft Office.

U praktičnom djelu ovog rada provedena je analiza naprezanja zaštitne konstrukcije iskopa pomoću AB pilota promjera 30 cm, dijafragme debljine 30 cm, profila IPE 160 S355 te okruglim cijevnim profilima promjera 168,8 mm, debljine stijenki 4,5 mm za dubine iskopa u tlu od 2, 4 te 6 metara.

Na kraju rada su rezultati dobiveni analizom pojašnjeni i međusobno uspoređeni te se došlo do zaključka koja se vrsta zaštite iskopa najbolje pokazala pri određenim dubinama iskopa.

**Ključne riječi:** konzolni nosač, savijanje



## **Abstract**

The paper aims to determine and calculate which type of a cantilever girder is the safest in the implementation of pit excavation protection.

The paper starts with the explanation of bending, the geometric properties of a cross section, and bending types. Also, the concept of a neutral line of a girder is explained in more detail and a stress diagram of a cross section is drawn.

The theoretical review is followed by a practical part created in GeoStudio 2012 (Sigma / W), and Excel from the Microsoft Office software package is used for the interpretation of the data. In the practical part of the paper, the analysis of excavation protection stresses is performed using reinforced concrete piles which are 30 cm in diameter, the diaphragm is 30 cm thick, IPE 160 S355 profile and round pipe profiles are 168.8 mm in diameter and for excavation depths of 2 , 4 and 6 meters the wall is 4.5 mm thick.

Finally, the results of the analysis are explained and compared and it is concluded which type of excavation protection is the best at certain excavation depths.

**Key words:** cantilever girder, bending

## Sadržaj

Uvod.....	1
Terminologija i zadaće pri analizi složenog savijanja .....	2
Geometrijske osobine presjeka .....	6
Čisto savijanje i savijanje poprečnim silama .....	12
Čisto savijanje .....	12
Opći slučaj savijanja (savijanje silama) .....	16
Koso savijanje.....	17
Koso savijanje .....	17
Koso savijanje uz djelovanje uzdužne sile.....	20
Neutralna linija .....	22
Primjeri crtanja dijagrama naprezanja u poprečnom presjeku.....	24
Praktični dio.....	31
Zaštita iskopa AB pilotima promjera 30 cm .....	32
Zaštita dijafragmom debljine 30 cm .....	38
Zaštita profilima IPE 160 S355 .....	43
Zaštita okruglim cijevnim profilima promjera 168,3 mm, debljine stjenki 4,5 mm, S355.....	48
Zaključak .....	55
Literatura.....	56

## Uvod

Konzolni nosač je vrsta nosača koji je upet s jedne strane a druga strana mu je slobodna. Često se pojavljuju u raznim inženjerskim zadaćama poput gradnji kuća, zgrada, rasvjetnih stupova, u skladištima, za zaštitu klizišta, iskopa i dr.

Konzolni nosač kao i svaki drugi nosač mora zadovoljavati neke uvjete kako bi se mogao koristiti. Kod odabira nosača mora se paziti i na materijal od kojeg je taj isti nosač izrađen kako bi osigurao potrebnu čvrstoću i krutost koja se traži. U geotehnici konzolni nosači se najčešće koriste u obliku pilota kako bi se osiguralo ili saniralo klizište, kao dio potpornog sklopa konstrukcije zaštite građevinskih jama, ili kao temelj kod gradnje kuća na tlu koje ne zadovoljava svojom nosivošću. U praksi se najčešće koriste armirano betonski i čelični piloti. Vrsta pilota najviše ovisi o tome kakvih je svojstva tlo te stabilnosti koju isti moraju pružiti, a javlja se i financijski faktor koji može vrlo često biti i presudan kod njihove izvedbe.

Jedan od važnih čimbenika kod izrade modela na računalu te same izrade zaštite tla u praksi je i krutost samog materijala koji se koristi. Krutost zapravo prikazuje otpornost materijala na deformaciju. Deformacija koja će biti u centru pažnje ovog rada je ona koja nastaje uslijed savijanja. Proračun pomaka, odnosno deformacija, generalno predstavlja komponentu dokaza na granično stanje uporabivosti objekta. U slučaju građevinskih jama riječ je o tome da pomaci ne smiju premašiti dopuštene vrijednosti s obzirom na geometrijske zahtjeve, ali i zbog nepovoljnog utjecaja na objekte u neposrednoj blizini jame.

## Terminologija i zadaće pri analizi složenog savijanja

Među prvima koji je pristupio ozbiljnijem razmatranju problema složenog savijanja je i Galileo Galilei (1564-1642) koji je 1638. godine objavio svoje djelo "I due nuovi scienze fisiche" u kojem je krenuo s razmatranjem problema od konzolnog nosača. Galileo je pretpostavio da su naprezanja po presjeku jednoliko raspodijeljena te bi po Galilejevoj pretpostavci maksimalno naprezanje iznosilo:

$$\sigma_{max} = 2 \frac{Fl}{bh^2}$$

Iako je krivo pretpostavio i izrazio pogrešnu formulu za maksimalno naprezanje, njegov rad je imao veliko značenje u daljnjem razvoju teorije savijanja (Alfirević, 1989).

Nakon pedesetak godina od Galilejevog rješenja u teoriji savijanja javlja se E. Mariotte koji je uočio da se vlakna sve više rastežu što su dalje od okretišta te je popravio Galilejevu jednadžbu koja je zatim glasila:

$$\sigma_{max} = 3 \frac{Fl}{bh^2}$$

E. Mariotte zadržao je Galilejevu pretpostavku da se kod savijanja javljaju samo vlačne sile. Mnogi istraživači su prihvatili njegovo rješenje iako još uvijek nije bilo u potpunosti točno (Alfirević, 1989).

Alfirević (1989) navodi da je prvo potpuno točno rješenje problema dao je fizičar Parent 1713. godine, ali pošto nije dovoljno jasno iznio svoj prikaz suvremenici ga nisu prihvaćali. Sasvim neovisno o njemu Coulomb 1773. godine daje točno rješenje koji je zaključio da se pojavljuju i vlačna i tlačna naprezanja. Doveo je do zaključka da rezultante vlačnih i tlačnih naprezanja moraju biti jednake. Coulombova jednadžba za maksimalno naprezanje glasi:

$$\sigma_{max} = 6 \frac{Fl}{bh^2}$$

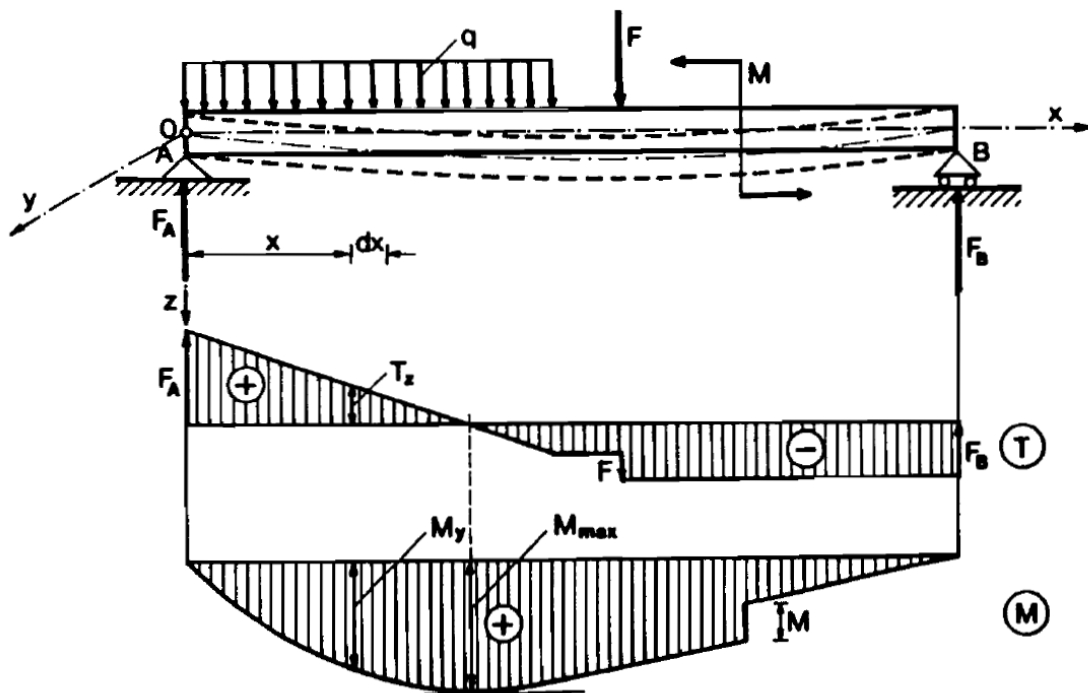
Prema Šimić (2002) gredni nosači ili grede djelovanjem koncentriranih momenata, koncentriranih sila ili kontinuiranog opterećenja deformiraju na određen način koji se naziva savijanje. Kod takvog načina deformiranja dolazi do iskrivljenja uzdužne osi

nosača, mijenja se zakrivljenost osi nosača. Vlakna paralelna s osi štapa se skraćuju ako se ona nalaze s udubljene strane, a produžuju se ako se nalaze s ispupčane strane.

S obzirom na opterećenje koje ga izaziva, savijanje može biti podijeljeno na:

1. Čisto savijanje – izazivaju ga isključivo momenti savijanja  
Javlja se na mjestima gdje je u dijagramu  $T = 0$  i  $M = konst.$
2. Savijanje poprečnim silama – izazivaju ga poprečna opterećenja bilo koncentrirana ili kontinuirana  
Javlja se na mjestima gdje je u dijagramu  $T \neq 0$  i  $M \neq konst$  (Ivandić, 2019).

U prikazima nosača (slika 1) pretpostavlja se da je nosač trodimenzionalno tijelo koje se nalazi u prostoru. Oblik mu je definiran ravnom uzdužnom osi te poprečnim presjekom koji se duž osi može mijenjati. Koordinatne osi nosača uobičajeno se postavljaju po pravilu desne ruke, gdje je uzdužna os  $x$ , a  $y$  i  $z$  su osi poprečnog presjeka. Gledajući opći slučaj u nekom poprečnom presjeku u smjeru svake osi postoje presječne sile, uzdužna  $N_x$  i poprečne  $T_y$  i  $T_z$  te oko svake osi vrti presječni moment  $M_x$ ,  $M_y$  i  $M_z$  (Šimić, 2002).



Slika 1. Prikaz nosača izloženog djelovanju opterećenja (Šimić, 2002)

Šimić (2002) objašnjava koje se unutarnje sile javljaju u poprečnom presjeku (slika 2), a to su poprečna sila  $T_z$  i moment savijanja  $M_y$  koji djeluje u ravnini okomitoj na ravninu poprečnog presjeka nosača. Unutarnje sile u presjeku  $x$  odredit će se pomoću metode prereza. Pretpostavka je da se štap prerezao na duljini  $x$  od lijevog oslonca nosača, odbaci se desni dio te razmotri ravnoteža lijevog dijela štapa. Uzajamno djelovanje štapa mijenja se momentom savijanja  $M_y$  i poprečnom silom  $T_z$ .

$M_y$  i  $T_z$  određujemo iz uvjeta ravnoteže:

$$\Sigma F_z = 0 ; \quad F_A - qx - T_z = 0$$

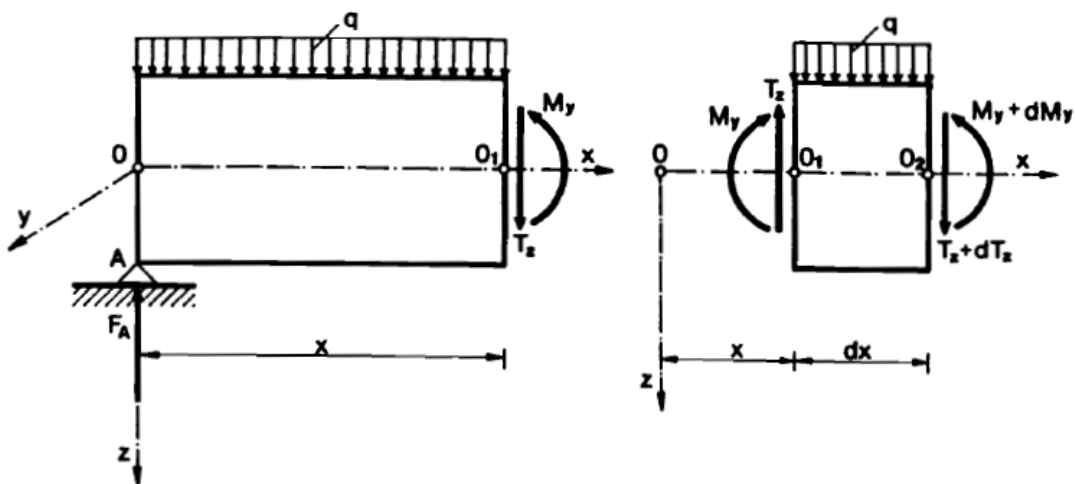
$$T_z = F_A - qx = \Sigma F_{i(z)}$$

i:

$$\Sigma M_{O_1} = 0 ; \quad F_A x - q \frac{x^2}{2} - M_y = 0$$

$$M_y = F_A x - q \frac{x^2}{2} = \Sigma M_{i_{O_1}}$$

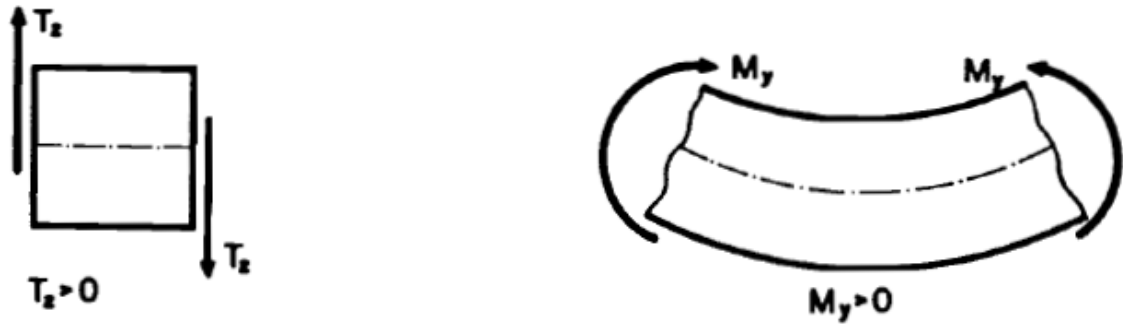
Ostali uvjeti ravnoteže su automatski zadovoljeni.



Slika 2. Poprečni presjek nosača (Šimić, 2002)

Poprečna sila  $T_z$  u poprečnom presjeku jednak je sumi svih sila na os nosača koje djeluju s jedne ili druge strane promatranog presjeka. Moment savijanja  $M_y$  jednak je sumi momenata u odnosu na težište poprečnog presjeka svih sila koje djeluju s jedne ili druge strane promatranog presjeka (Šimić, 2002).

Šimić (2002) navodi ako se u prikladnom mjerilu na osi nosača nanesu poprečna sila  $T_z$  i moment  $M_y$ , dobit će se dijagram poprečnih sila i dijagram momenta savijanja. Veličinu poprečne sile na  $T$  dijagramu predstavlja os ordinate, a  $M$  dijagrama veličinu momenta savijanja u određenom presjeku nosača.



Slika 3. Djelovanje poprečne sile i momenta na os nosača (Šimić, 2002)

Dogovoreno je i pravilo o predznacima poprečne sile  $T_z$  i momenta savijanja  $M_y$  (slika 3) koji su pozitivni ako su im vektori usmjereni u pozitivnim smjerovima koordinatnih osi u presjeku s vanjskom normalom orijentiranom u pozitivnom smjeru koordinatnih osi.

## Geometrijske osobine presjeka

Kod promatranja aksijalno opterećenog nosača dolazi se do zaključka da veličina naprezanja i krutost nosača ovise o površini poprečnog presjeka, ali kod nosača opterećenih na savijanje veličina naprezanja i krutost štapa ne ovise samo o veličini poprečnog presjeka, nego i o njegovom obliku i položaju. U teoriji savijanja prizmatičnih nosača susrećemo se sa složenijim geometrijskim karakteristikama ravnih presjeka, a te karakteristike su statički momenti. Momenti tromosti i momenti otpora ravnih presjeka (Šimić, 2002).

Ivandić (2019) navodi sljedeće geometrijske osobine poprečnog presjeka:

1. Površina poprečnog presjeka:  $A = \int_A dA$
2. Statički moment površine poprečnog presjeka:
  - a. Statički moment površine = površina  $\times$  krak
  - b. Osni (statički) moment poprečnog presjeka:

$$S_y = \int_A z dA$$

$$S_z = \int_A y dA$$

- c. Polarni (statički) moment presjeka s obzirom na pol O:

$$S_o = \int_A r dA = \int_A \sqrt{y^2 + z^2} dA$$

3. Težište površine poprečnog presjeka:

$$T(y_T, z_T) \Rightarrow y_T = \frac{S_z}{A} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA}, z_T = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A z dA}{\int_A dA}$$

*(trebalo bi u pisanju formula eventualno izbjeći prikaz crtkanog kvadratića u gornjoj granici integrala)*

Statički moment površine s obzirom na težišnu os poprečnog presjeka je jednak nuli.

$$S_{y'} = 0 \text{ i } S_{z'} = 0$$



4. Momenti površine drugog reda

a. Osnovi moment površine drugog reda:

$$I_y = \int_A z^2 dA \quad I_z = \int_A y^2 dA$$

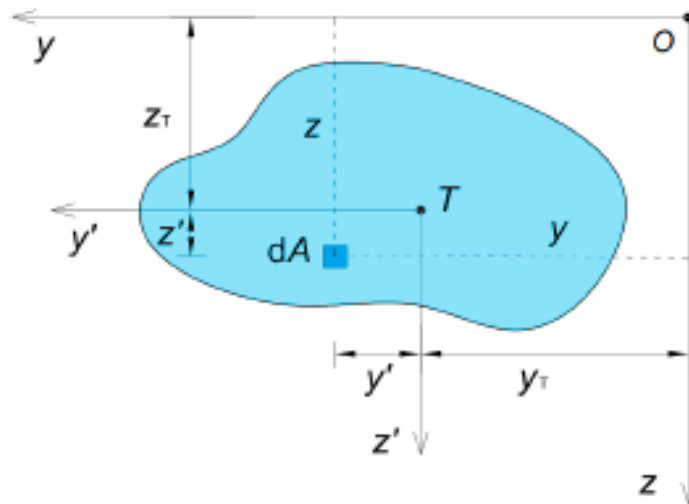
b. Polarni moment površine drugog reda:

$$I_o = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_y + I_z$$

c. Centrifugalni moment površine drugog reda:

$$I_{yz} = \int_A yz dA \Rightarrow \text{ako je } y \text{ i/ili } z \text{ os simetrije poprečnog presjeka}$$

$$I_{yz} = 0$$



Slika 4. Promjena momenta površine drugog reda pri translaciji koordinatnih osi (Ivandić, 2019)

Steinerov teorem (slika 4):

$$I_y = I_{y'} + A * z_T^2$$

$$I_z = I_{z'} + A * y_T^2$$

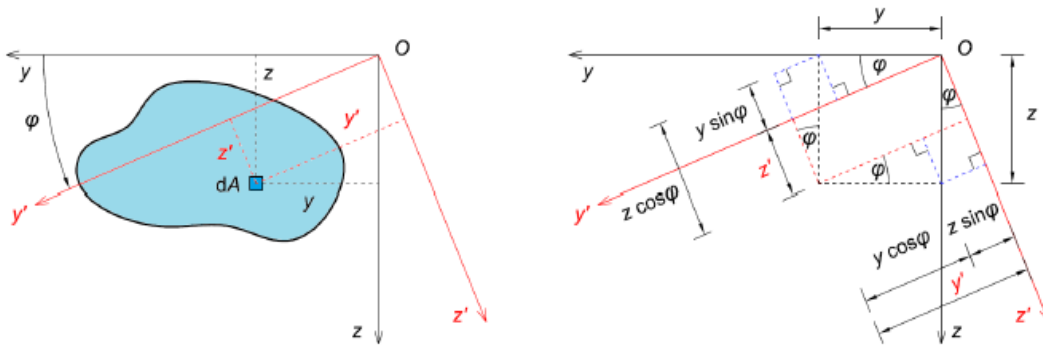
$$I_{yz} = I_{y'z'} + A * y_T * z_T$$

$$I_o = I_T + A * r_T^2$$

Vlastiti i položajni moment površine drugog reda.

Promjena momenta površine drugog reda pri rotaciji koordinatnih osi.

Osi  $y$  i  $z$  zarotirane su za proizvoljni kut  $\varphi$  u novi položaj  $y'$  i  $z'$  (slika 5).



Slika 5. Osi  $y$  i  $z$  zarotirane za neki kut  $\varphi$

Općenito vrijedi:

$$I_O = I_y + I_z = I_{y'} + I_{z'}$$

Sa slike desno slijedi:

$$y' = y \cos \varphi + z \sin \varphi$$

$$z' = z \cos \varphi - y \sin \varphi$$

Može se pisati:

$$\begin{aligned} I_{y'} &= \int_A z'^2 dA = \int_A (z \cos \varphi - y \sin \varphi)^2 dA \\ &= \int_A (z^2 \cos^2 \varphi - 2yz \sin \varphi \cos \varphi + y^2 \sin^2 \varphi) dA \\ &= \cos^2 \varphi \int_A z^2 dA \\ &\quad + \sin^2 \varphi \int_A y^2 dA \\ &\quad - 2 \sin \varphi \cos \varphi \int_A yz dA = I_y \cos^2 \varphi + I_z \sin^2 \varphi - 2I_{zy} \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

Analogno, za  $I_{z'}$  dobiva se:

$$I_{z'} = I_z \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi + 2I_{zy} \sin \varphi \cos \varphi$$

Iz trigonometrijskih transformacija:

$$\begin{aligned}
 2\sin\varphi\cos\varphi &= \sin 2\varphi \quad \text{i} \\
 \cos 2\varphi &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \cos 2\varphi \end{aligned}} \right\}
 \begin{aligned}
 \cos^2\varphi &= \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \\
 \sin^2\varphi &= \frac{1-\cos 2\varphi}{2}
 \end{aligned}$$

$$1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$$

Konačno se dobije:

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi - I_{yz} \sin 2\varphi$$

Na isti način za  $I_{z'}$  dobilo bi se:

$$I_{z'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\varphi - I_{yz} \sin 2\varphi$$

Za centrifugalni moment površine drugog reda ima:

$$\begin{aligned}
 I_{y'z'} &= \int_A y' z' dA \\
 &= \int_A (y\cos\varphi + z\sin\varphi)(z\cos\varphi - y\sin\varphi) dA \\
 &= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \int_A yz dA + \sin\varphi\cos\varphi \left( \int_A z^2 dA - \int_A y^2 dA \right) \\
 &= \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi
 \end{aligned}$$

Kod rotacije koordinatnog sustava mijenjaju se osni i centrifugalni momenti površine drugog reda, a polarni ostaje uvijek isti. Iz toga zaključuje se da mora postojati neka orijentacija koordinatnih osi koja će dati ekstremne vrijednosti osnih momenata površine drugog reda (Ivandić, 2019).

Uvjet za ekstreme  $I_{y'}$  i  $I_{z'}$ :

$$\frac{dI_{y'}}{d\varphi} = 0 \rightarrow -2 \left( \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi \right) = 0 \rightarrow I_{y'z'} = 0$$

$$\frac{dI_{z'}}{d\varphi} = 0 \rightarrow 2 \left( \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi \right) = 0 \rightarrow I_{y'z'} = 0$$

Iz ovih uvjeta slijedi:  $\tan 2\varphi = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}$

Prema Ivandić (2019) dolazi se do tri zaključka, a to su:

Oba osna momenta površine drugog reda poprimaju ekstremnu vrijednost pri istom položaju koordinatnih osi  $\varphi$ :  $\tan 2\varphi = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}$

Osnosi momenti površine drugog reda poprimaju ekstremne vrijednosti pri položaju koordinatnih osi koji daje centrifugalni moment površine drugog reda jednak je nuli:  $I_{y'z'} = 0$

Polarni moment površine drugog reda je pri rotaciji osi konstantan pa je očito da će pri kutu  $\varphi$  jedan osni moment površine drugog reda biti maksimalan, a drugi minimalan. Osi ekstremnih momenata drugog reda nazivaju se osima glavnih momenata površine drugog reda, a ako te osi prolaze kroz težište poprečnog presjeka glavnim osima.

Iz trigonometrijskih transformacija:

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{\tan 2\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}} \quad i \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}} \quad \text{ili}$$

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{2I_{yz}}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}} \quad i \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{I_z - I_y}{\sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}}$$

Sada  $I_{y'}$  i  $I_{z'}$  postaju:

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}$$

$$I_{z'} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}$$

Odabirom predznaka + ili – možem se dobiti

$$I_{maks} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{yz}^2}$$

Ostaje samo pitanje koji je od  $I_{y'}$  i  $I_{z'}$  maksimalan, a koji je minimalan.

Funkcija tan je periodična s periodom  $\pi$ :

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}; \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} + \frac{\pi}{2}$$

$\varphi_1$   $[-45^\circ, 45^\circ]$  i  $\varphi_2$   $[45^\circ, 135^\circ]$

Pozitivan  $\varphi_1$  pojavljuje se kada je izraz  $\frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}$  pozitivan, a negativan  $\varphi_1$  se pojavljuje kada je izraz  $\frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}$  negativan.

Polumjeri površine drugog reda predstavljaju krak s čijim se kvadratom mora pomnožiti površina kako bi se dobili odgovarajući osni moment površine drugog reda ( $I_y = i_y^2 * A$ , slično kao što je  $S_y = z_T A$ ).

Osni polumjeri drugog reda su:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad i \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

Glavni polumjeri površine drugog reda su:

$$i_{maks} = \sqrt{\frac{I_{maks}}{A}} \quad i \quad i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A} \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}}$$

# Čisto savijanje i savijanje poprečnim silama

## Čisto savijanje

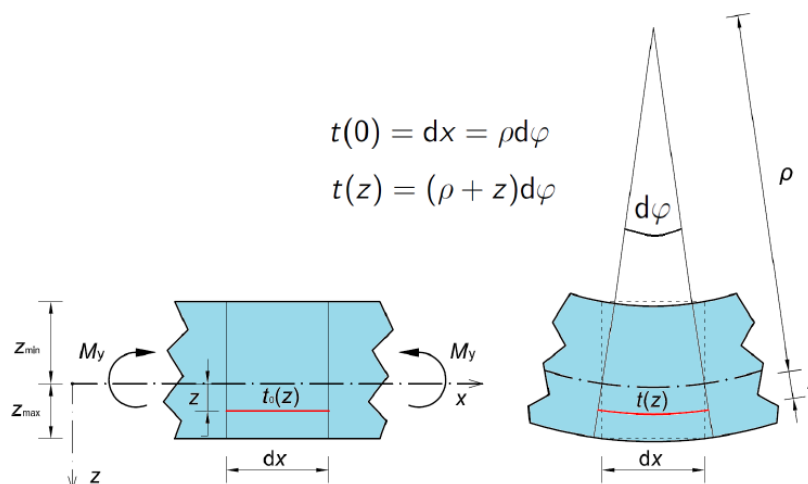
Prilikom opisa deformacije nosača uslijed savijanja treba uzeti u obzir sljedeće pretpostavke:

1. Poprečni presjeci deformiranog nosača ostaju ravni i ne mijenjaju svoj oblik.
2. Poprečni presjeci i u deformiranom stanju ostaju okomiti na os nosača (Ivandić, 2019).

Prema Ivandić (2019) na temelju tih pretpostavki izvode se izrazi za naprezanja i deformacije, koji vrijede uz određena ograničenja, a to su:

1. Visina nosača  $h$  je malena u odnosu na raspon  $l$ , greška u proračunu bit će u granici od 2%, ako je ispunjen uvjet  $h/l (0,2 \text{ } 0,25)$   
Ograničenje se odnosi na određivanje naprezanja i pomaka.
2. Maksimalni nagib tangente na elastičnu liniju treba biti manji od 2 do 5 stupnjeva.
3. Presjeci koji nisu u blizini djelovanja opterećenja ili krajeva štapa su oni koji se koriste za analizu.

Ako se promotri segment nosača opaža se da u nedeformiranom stanju je duljina svih vlakana segmenta  $dx$ , pa vrijedi  $t_0(z) = dx$  (slika 6).



Slika 6. Deformirani segment nosača (Ivandić, 2019)

Desna slika prikazuje deformirano stanje nosača u kojem dolazi do krivljenja osi nosača, javlja se radijus zakrivljenosti  $\rho$ , a vlakna iznad osi  $x$  se skraćuju dok se ona ispod osi  $x$  rastežu te na osi  $x$  ostaju iste duljine.

$$t(0) = dx = \rho d\varphi$$

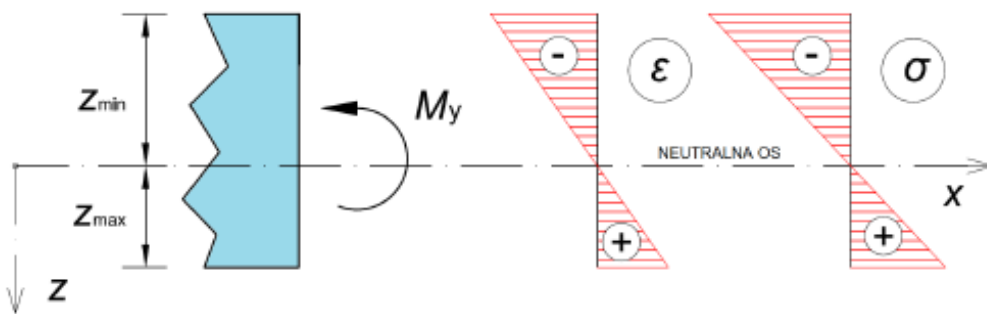
$$t(z) = (\rho + z)d\varphi$$

Deformaciju vlakna možemo zapisati kao:

$$\varepsilon(z) = \frac{\Delta t(z)}{t_0(z)} = \frac{t(z) - t_0(z)}{t_0(z)} = \frac{(\rho + z)d\varphi - dx}{dx} = \frac{(\rho + z)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{z}{\rho}$$

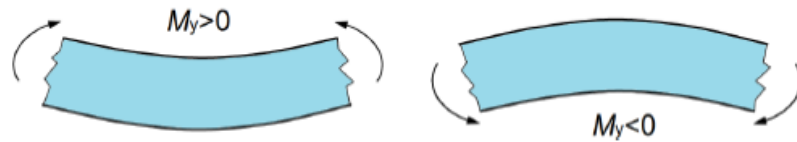
Ivandić (2019) navodi da se sloj u kojem nije došlo do deformacije vlakana naziva neutralnim slojem ( $\varepsilon(0)=0$ ), a presjecište neutralnog sloja s poprečnim presjekom naziva se neutralnom osi. Deformacija vlakana nosača proporcionalna je njegovoj udaljenosti od neutralne osi, iz Hookeovog zakona (slika 7) dobije se da je raspodjela naprezanja po visini poprečnog presjeka nosača linearna, a u presjeku se javljaju tlačna i vlačna naprezanja:

$$\sigma(z) = E\varepsilon(z) = \frac{E}{\rho}z$$



Slika 7. Dijagram deformacija i naprezanja po visini poprečnog presjeka nosača (Ivandić, 2019)

U poprečnom presjeku nosača djeluje samo moment savijanja  $M_y$ , koji je rezultat postojanja normalnih naprezanja u presjeku (slika 8).



Slika 8. Prikaz smjera djelovanja pozitivnih i negativnih momenata (Ivandić, 2019)

Iz ravnotežnih jednadžbi slijedi:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \int_A \sigma dA = 0$$

$$\Sigma M_{(z)} = 0 \rightarrow \int_A \sigma y dA = 0$$

$$\Sigma M_{(y)} = M_y \rightarrow \int_A \sigma z dA = M_y$$

Ravnotežne jednadžbe postaju:

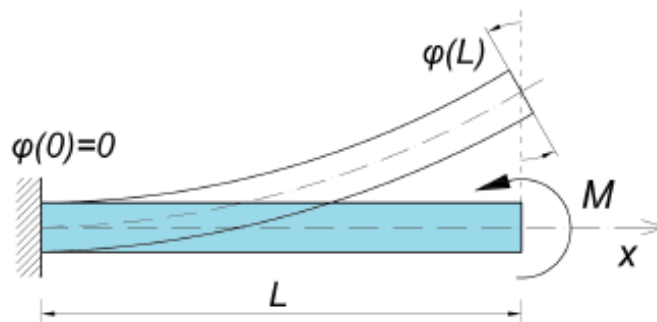
$$\int_A \sigma dA = 0 \rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A z dA = 0 \rightarrow \int_A z dA = 0$$

$$\int_A \sigma y dA = 0 \rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y z dA = 0 \rightarrow \int_A y z dA = 0$$

$$\int_A \sigma z dA - M_y = 0 \rightarrow M_y = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 dA$$

Ovi integrali  $\int_A z dA$ ,  $\int_A y z dA$  i  $\int_A z^2 dA$  ovisi isključivo o obliku i veličini poprečnog presjeka nosača te stoga predstavljaju neke od geometrijskih veličina poprečnog presjeka (Ivandić, 2019).





Slika 9. Primjer čistog savijanja kod konzolnog nosača (Ivandić, 2019)

Rubni uvjet bi bio:  $\varphi(0)=0$ , iz  $\varphi(0) = \frac{M+0}{EI_y} + C$  dobije se da je  $C=0$ .

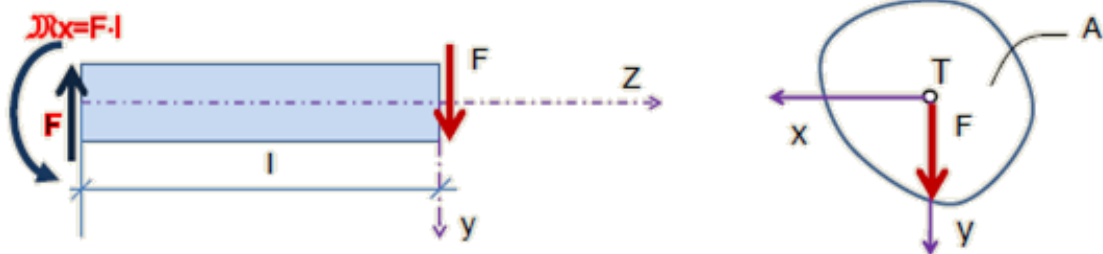
Kut zaokreta svakog poprečnog presjeka može se dobiti, pa je  $\varphi(L) = \frac{ML}{EI_y}$ .

$EI_y$  naziva se krutošću nosača na savijanje i zaključak je da što je krutost veća deformacije nosača su manje. Za krutost na savijanje nosača važno je kako je površina poprečnog presjeka raspoređena s obzirom na os  $y$  ( $I_y = \int_A z^2 dA$ , pa je poželjno da je udaljenost  $z$  što veća).

Kod savijanja nosača poprečnim silama (slika 9), u odnosu na čisto savijanje dolazi do dodatnih efekata pri deformaciji i naprezanjima. Naprezanja koja se pojavljuju od savijanja određuju se na isti način kao i kod čistog savijanja, samo se moment  $M_y$  mijenja duž osi nosača.

## Opći slučaj savijanja (savijanje silama)

Greda je opterećena na desnoj strani silom  $F$  paralelno jednoj od glavnih centralnih osi inercije ( $y$  osi) (slika 10).



Slika 10. Nosač opterećen silom  $F$

Da bi lijeva strana bila u ravnoteži potrebni je da se na tom kraju javi sila  $-F$  koja će uravnotežiti silu  $F$  te moment  $M_x = F \cdot l$  koji će uravnotežiti moment koji stvara sila  $F$ .

Uslijed vanjske sile  $F$  u nosaču se javljaju unutarnje sile, a to su poprečna sila  $F$  i moment  $M_x$ .

Moment savijanja u presjeku jednak je zbroju svih momenata savijanja koji se nalaze lijevo ili desno od presjeka koji je promatran, a on je pozitivan kada zateže donju stranu nosača.

Poprečna sila je ona koja je okomita na os nosača, a jednaka je zbroju svih poprečnih sila lijevo ili desno od promatranog presjeka, te je pozitivna kada suprotan kraj nosača okreće u smjeru kazaljke na satu (s lijeva na desno) (Ivandić, 2019).

## Koso savijanje

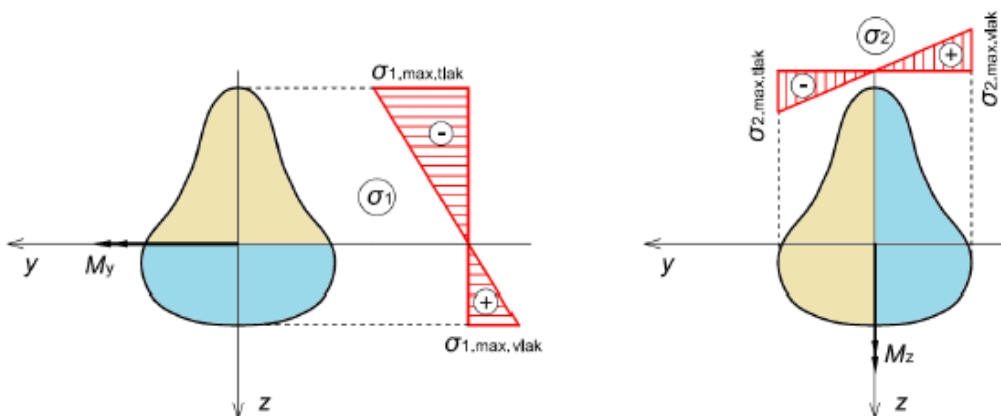
### Koso savijanje

Prema Ivandić (2019) koso savijanje je vrsta savijanja kod kojeg se ravnina djelovanja momenta ne poklapa niti s jednom od glavnih osi poprečnog presjeka. Savijanje oko osi  $y$  može nastati od koncentriranih momenata oko osi  $y$  ili od opterećenja silama u smjeru osi  $z$ . Nosač se može savijati i oko druge osi poprečnog presjeka, a to je os  $z$ . Kosi moment  $M$  može se rastaviti na dvije komponente u smjeru glavnih osi poprečnog presjeka:  $M_y = M \cos \alpha$  i  $M_z = M \sin \alpha$ , gdje je kut  $\alpha$ , kut koji ravnina djelovanja zatvara s osi  $y$ .

Moment oko osi  $x$ ,  $M_x$ , predstavlja torziju, a momenti  $M_y$  i  $M_z$  savijanja oko osi  $y$  i  $z$ . Kada bi se zanemarila uzdužna sila  $N_x$  i moment uvijanja  $M_x$  vidjelo bi se da savijanje oko osi  $z$  može biti čisto ili uzrokovano poprečnim silama u  $y$  smjeru.

Ako bi se koordinatni sustav zarotiralo za kut od  $90^\circ$  oko osi  $x$ , savijanje oko osi  $z$  bi dovelo do zaključka da je smjer pozitivne poprečne sile  $T_y$  definiran suprotno u odnosu na  $T_z$ , ali moment  $M_z$  nema razlike u odnosu na moment  $M_y$ .

Opći slučaj savijanja (slika 11) može se dogoditi oko bilo koje osi u poprečnom presjeku, pa tako i oko osi koja se ne poklapa s glavnim osima  $y$  i  $z$ . Poprečna sila je bilo koja sila koja djeluje u ravnini poprečnog presjeka, neovisno o smjeru.



Slika 11. Prikaz raspodjele naprezanja po presjeku  $M_y$  i  $M_z$ .

$$\sigma_1(z) = \frac{M_y}{I_y} z \quad \sigma_2(y) = -\frac{M_z}{I_z} y$$

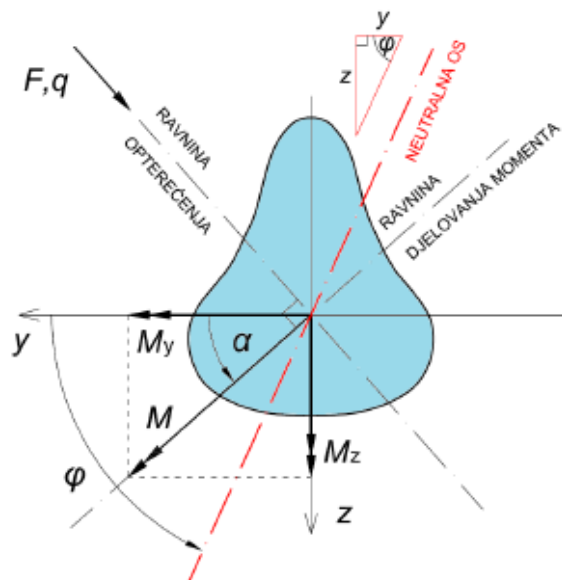
Kosi moment daje naprezanje po presjeku:

$$\sigma(y, z) = \sigma_1(z) + \sigma_2(z) = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y = M \left( \frac{\cos \alpha}{I_y} z - \frac{\sin \alpha}{I_z} y \right)$$

Položaj neutralne osi može se odrediti iz uvjeta  $\sigma(y, z) = 0$ :

$$\frac{\cos \alpha}{I_y} z - \frac{\sin \alpha}{I_z} y = 0 \rightarrow \frac{z}{y} = \frac{I_y}{I_z} \tan \alpha$$

Izraz koji se dobije predstavlja jednadžbu pravca.



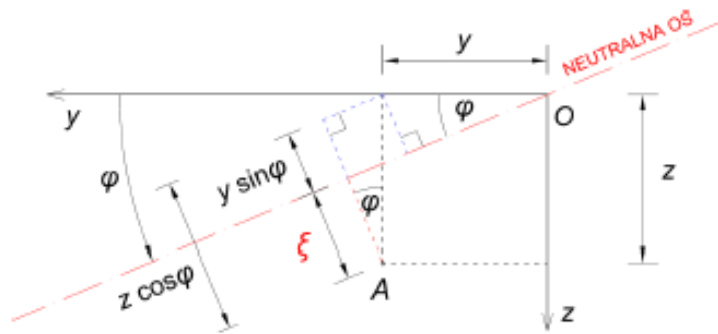
Slika 12. Prikaz ravnina opterećenja i djelovanja momenta

Pa se iz toga (slika 12) može uvesti sljedeći zapis:

$$\tan \varphi = \frac{I_y}{I_z} \tan \alpha$$

Kut  $\varphi$  je kut koji neutralna os zatvara s osi  $y$ . U općem slučaju kut  $\varphi$  je različit od kuta  $\alpha$ , a jednaki su samo kada je:

1.  $I_y = I_z$
2.  $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{3}$  – ravnina opterećenja poklapa se s nekom od glavnih osi poprečnog presjeka



Slika 13. Prikaz izračuna udaljenosti točke A od neutralne osi

Kada bi bila uvedena koordinata  $\xi$  koja definira udaljenost od neutralne osi, iz slike 13

iznad vidjelo bi se sljedeće:  $\xi = \cos\varphi(z - y \tan\varphi) = \cos\varphi \left( z - y \frac{I_y}{I_z} \tan\alpha \right) =$

$$\frac{I_y \cos\varphi}{\cos\alpha} \left( \frac{\cos\alpha}{I_y} z - \frac{\sin\alpha}{I_z} y \right) = \frac{I_y \cos\varphi}{\cos\alpha} \frac{\sigma}{M} \frac{1}{\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}} = \frac{\sigma}{M} \frac{I_y \cos\varphi}{\cos\alpha \cos\varphi \sqrt{\tan^2\varphi + 1}} =$$

$$\frac{\sigma}{M} \frac{I_y}{\cos\alpha \sqrt{\left(\frac{I_y}{I_z}\right)^2 \tan^2\alpha + 1}} = \frac{\sigma}{M \sqrt{\left(\cos\alpha/I_y\right)^2 + \left(\frac{\sin\alpha}{I_z}\right)^2}}$$

Nakon sređivanja zapisa, napreznja  $\sigma$  na udaljenosti  $\xi$  od neutralne osi zapisuje se kao:

$$\sigma(\xi) = \xi M \sqrt{\left(\frac{\cos\alpha}{I_y}\right)^2 + \left(\frac{\sin\alpha}{I_z}\right)^2}$$

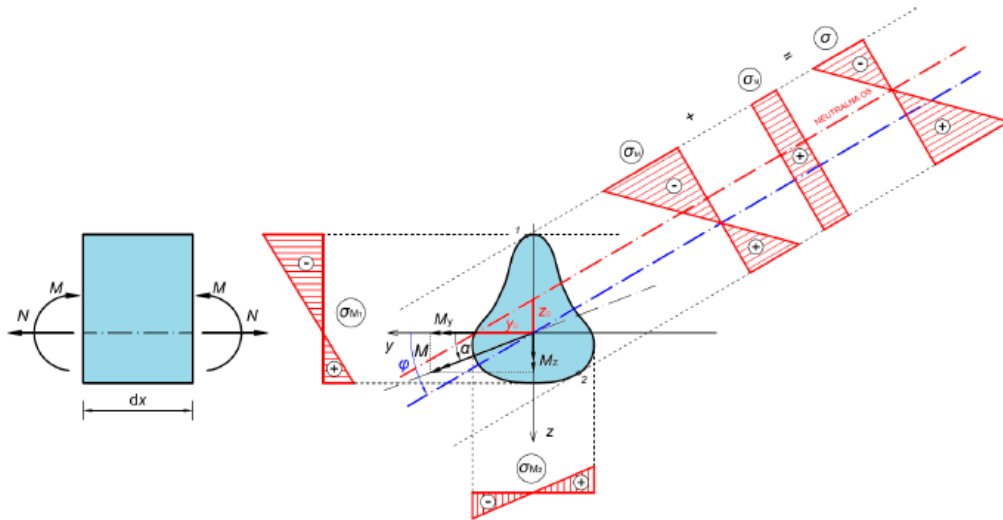
Napreznja koja djeluju na jednakoj udaljenosti od neutralne osi su jednaka, a najveća napreznja su u onim točkama koja su najudaljenija od neutralne osi  $\xi_{maks}$ :

$$\sigma_{(1)} = \sigma_{maks.tlak} = \frac{M_y}{I_y} z_1 - \frac{M_z}{I_z} y_1$$

$$\sigma_{(2)} = \sigma_{maks.vlak} = \frac{M_y}{I_y} z_2 - \frac{M_z}{I_z} y_2$$

## Koso savijanje uz djelovanje uzdužne sile

Do kosog savijanja uz djelovanje uzdužne sile dolazi kada u nekom poprečnom presjeku osim momenta savijanja oko osi  $y$  djeluje i uzdužna sila (slika 14).



Slika 14. Prikaz kosog savijanja uz djelovanje uzdužne sile

Iz slike se vidi da naprezanje u točki  $(y, z)$  poprečnog presjeka iznosi:

$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} y - \frac{M_z}{I_z} z$$

Položaj neutralne osi za  $\sigma(y, z) = 0$  određuje se:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} y - \frac{M_z}{I_z} z = 0 \rightarrow 1 + \frac{M_y A}{I_y N} z - \frac{M_z A}{I_z N} y = 0$$

A to se može zapisati kao:  $\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1$  što je segmentni oblik jednadžbe pravca, gdje su  $y_0$  i  $z_0$  odsječci neutralne osi na osima  $y$  i  $z$ .

$$y_0 = \frac{N}{M_z} \frac{I_z}{A} = \frac{N \cdot i_z^2}{M_z} \quad \text{i} \quad z_0 = -\frac{N}{M_y} \frac{I_y}{A} = -\frac{N \cdot i_y^2}{M_y}$$

Na najudaljenijim točkama od neutralne osi pojavljuju se najveća naprezanja.

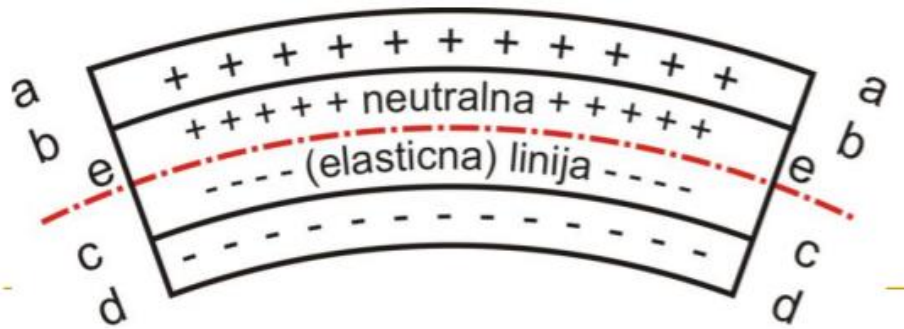
$$\sigma_{maks.tlak} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_1 - \frac{M_z}{I_z} y_1$$

$$\sigma_{maks.vlak} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z_2 - \frac{M_z}{I_z} y_2$$

Ovisno o veličini i predznaku parametara  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $A$ ,  $I_y$  i  $I_z$ , u poprečnom presjeku je moguće dobiti samo vlačna ili samo tlačna naprezanja uz linearnu raspodjelu.

## Neutralna linija

Pod djelovanjem sprega sila nosač se deformira tako da vlakna mijenjaju svoju dužinu. Dužina jednih vlakna se povećava, a drugih se smanjuje. Vlakna kod kojih ne dolazi ni do produživanja, a ni skraćivanja čine neutralnu liniju nosača.



Slika 15. Prikaz neutralne linije nosača

Uočava se da je veće produljenje vlakna koliko je ono udaljenije od neutralne linije nosača s gornje strane (a-a je veće od b-b). S donje strane se skraćuju vlakna što su ona udaljenija od neutralne linije nosača (c-c je veće od d-d). Zaključak je da se najviše izdužuju gornja vlakna, a najmanje, odnosno skraćuju se, s donje strane nosača pod djelovanjem naprezanja kao sa slike 15 (Ivandić, 2019).

Neutralna linija kod čistog savijanja je mjesto točaka presjeka gdje je naprezanje jednako nuli.

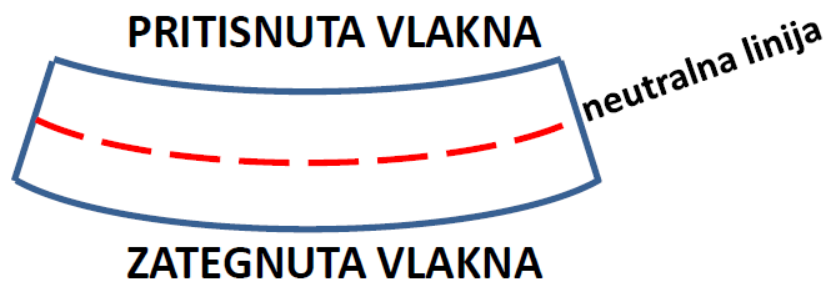
$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y = 0$$

kako je:  $\frac{M_x}{I_x} \neq 0$

slijedi da je jednačba neutralne linije kod čistog savijanja dana jednačbom  $y=0$ , a to je jednačba osi  $x$ .

Zaključuje se da se neutralna linija poklapa s glavnom osi  $x$ .





Slika 16. Prikaz promjene duljine vlakna kod čistog savijanja nosača

Položaj neutralne linije kod kosog savijanja različit je od onog položaja koji bi neutralna linija imala da se radi o čistom savijanju (slika 16) što možemo zaključiti iz sljedećeg:

$$M \left( \frac{\cos\alpha}{I_x} y + \frac{\sin\alpha}{I_y} x \right) = 0$$

Pošto moment savijanja nije jednak nuli ostaje:

$$\frac{\cos\alpha}{I_x} y + \frac{\sin\alpha}{I_y} x = 0$$

$$y = - \left( \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg}\alpha \right) x$$

Što je zapravo jednadžba neutralne linije kod kosog savijanja. Linija prolazi kroz težište poprečnog presjeka i zatvara kut  $\beta$  s pozitivnim dijelom osi  $x$ .

## Primjeri crtanja dijagrama naprezanja u poprečnom presjeku

On line udžbenik *Nauka o čvrstoći* navodi nekoliko primjera dijagrama naprezanja u poprečnom presjeku.

Unutarnje sile u nosaču su normalne sile, transverzalne sile i momenti savijanja, a predstavljaju se dijagramom unutarnjih sila (slika 17).



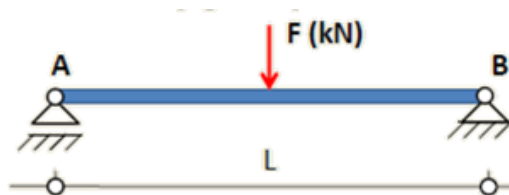
Slika 17. Pozitivni smjerovi sila i momenata

Prosta greda (slika 18) je nosač koji je na svojim krajevima vezan pokretnim i nepokretnim osloncem.



Slika 18. Prosta greda

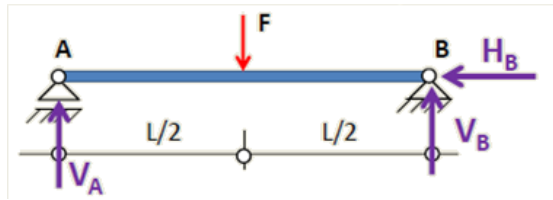
Uzet je primjer da je prosta greda opterećena silom u sredini te treba nacrtati dijagram poprečnih sila (slika 19).



Slika 19. Prosta greda opterećena silom  $F$

Postupak rješavanja je sljedeći:

1. Moraju se odrediti reakcije u osloncima tako da se zamijene oslonci s reakcijama oslonca (slika 20).



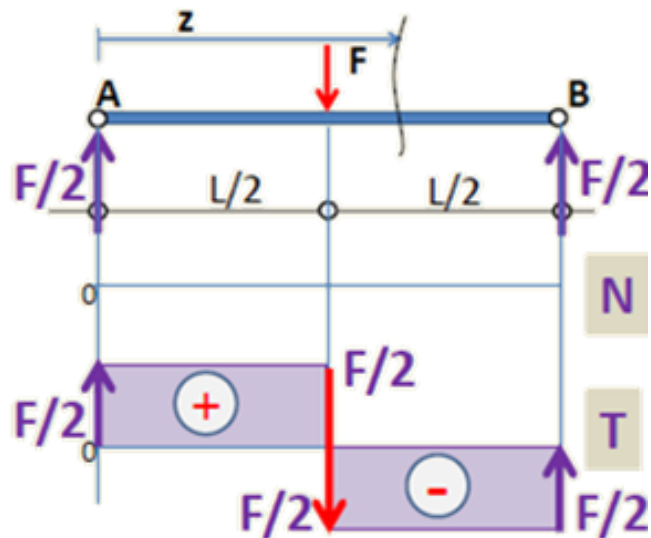
Slika 20. Zamjena oslonca s reakcijama

Moraju se postaviti uvjeti ravnoteže za sustav sila u ravnini bez zajedničke točke.

1. Suma svih horizontalnih sila je jednaka nuli,  $\Sigma H_i = 0$
2. Suma svih vertikalnih sila je jednaka nuli,  $\Sigma V_i = 0$
3. Suma momenata u nekoj točki je jednaka nuli  $\Sigma M_a = 0$

Ako nema horizontalnih opterećenja tada nema ni horizontalnih reakcija, ako je nosač simetričan i opterećenje simetrično tada su i reakcije simetrične (iste).

Dijagrami se crtaju okomito na os nosača (slika 21).



Slika 21. NT dijagram

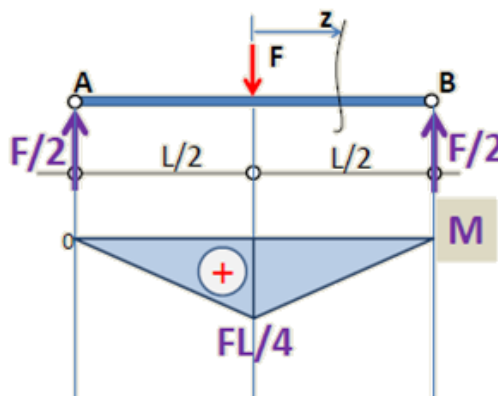
Dijagram normalnih sila je nula, odnosno nema ih, dijagram transverzalnih sila ako se kreće s lijeve strane i analiziraju sile redom:

- prva sila je reakcija  $F/2$ , ona je pozitivna, nanosi se sila na dijagram prema gore jer se pozitivne transverzalne sile crtaju s gornje strane nulte linije. Sve do sile  $F$  nema drugih transverzalnih sila tako da je  $T_z = F/2$
- Na mjestu koncentrirane sile javlja se skok transverzalnih sila u negativnom pravcu za vrijednost sile  $F$
- Vrijednost transverzalne sile poslije presjeka gdje djeluje sila  $F$  je:  

$$\Sigma F_z = +F/2 - F = -F/2$$
 Sve do sile  $V_B$  nema promjene transverzalnih sila. Na kraju sila  $V_B = F/2$  djeluje u pozitivnom smjeru gledajući s lijeve strane i zatvara dijagram (vraća ga u nulu). Svaki dijagram mora biti zatvoren.

Za crtanje dijagrama transverzalnih sila usvaja se pravilo da se krene s lijeve strane i nanose sile u pravcu njihovog djelovanja.

Crtanje dijagrama momenta savijanja (slika 22):

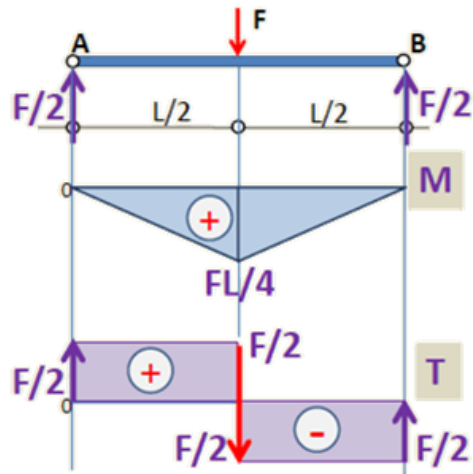


Slika 22. M dijagram

Krene se s lijeve strane i analiziraju karakteristični presjeci.

- oslonac  $A$  je pokretni i u njemu nema momenata
- na djelu gdje je  $0 < z < L/2$  vrijednost momenta je  $M = F/2 * z$ . To je linearna funkcija
- za  $z = L/2$  postoji  $M = F/2 * L/2 = FL/4$
- na djelu gdje je  $L/2 < z < L$  vrijednost momenta je:  $M_{z1} = \frac{F * L}{4} - \frac{F * z_1}{2}$
- za  $z_1 = L/2$  ima da je  $M_{z1}$  jednak 0 pa se dijagram vraća u nulu

Usporedi li se dijagram momenta i dijagram transverzalnih sila dobije se (slika 23):



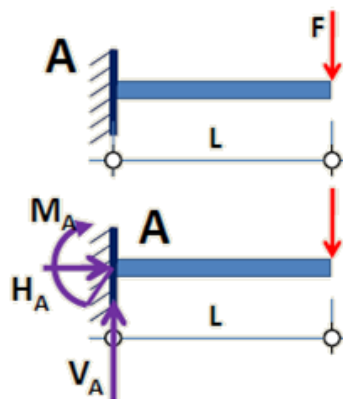
Slika 23. MT dijagram

- na djelu gdje je  $0 < z < L/2$  vrijednost momenta je  $M = F/2 * z$  (krivulja prvog reda), a vrijednost transverzalne sile je  $T_z = F/2$  (krivulja nultnog reda)

Zaključak iz ovoga je da je moment funkcija za stupanj veća u odnosu na transverzne sile, a to pravilo uvijek vrijedi.

Za primjer je uzet konzolni nosač opterećen koncentriranom silom.

Konzolni nosač (slika 24) je onaj nosač koji je na svom jednom kraju uklješten, a na drugom nema oslonac.



Slika 24. Konzolni nosač

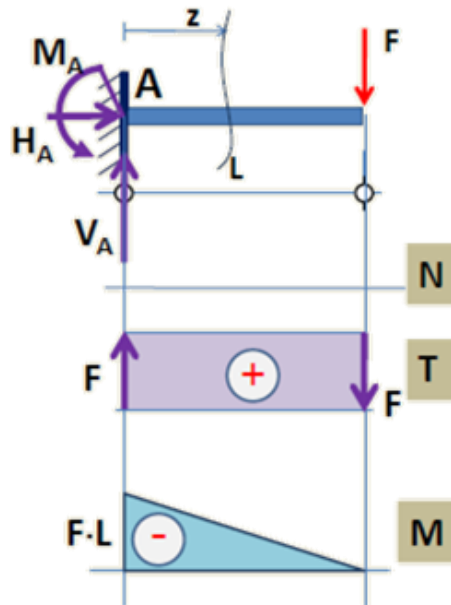
Uvjeti ravnoteže glase:

$$1) \sum H_i = 0; H_A = 0$$

$$2) \sum V_i = 0; V_A - F = 0; \rightarrow V_A = F$$

$$3) \sum M_A = 0; M_A + F \times L = 0; \rightarrow M_A = -F \times L$$

Pretpostavljeni smjer momenta oslonca je pogriješan pa je potrebno okrenuti smjer (slika 25).



Slika 25. MNT dijagram

Normalne sile – nema ih.

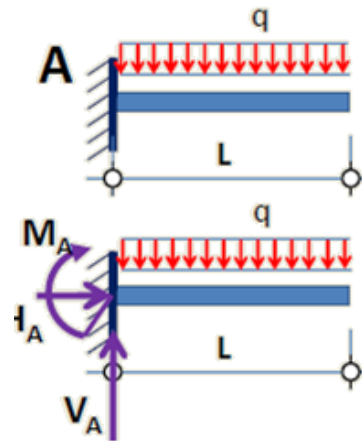
Transverzalne sile – oslonac  $A$ ,  $T_Z = V_A = F$ , konstantno do sile  $F$  koja vraća dijagram transverzalnih sila u nulu.

Moment savijanja – oslonac  $A$ ,  $M_Z = -F \times L$ , na  $0 < z < L$ ,  $M_Z = -F \times L + F \times z$ .

Dijagram momenta linearno opada, odnosno ide u pozitivnom smjeru za  $z=L$ ,

$$M_Z = F \times L + F \times L = 0$$

Sljedeći primjer je konzolni nosač opterećen linijski distribuiranim silom (slika 26).

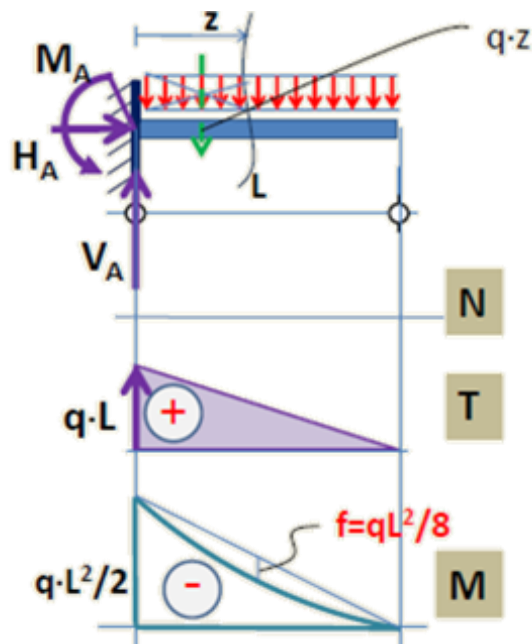


Slika 26. Konzolni nosač opterećen linijski distribuiranom silom

Uvjeti ravnoteže glase:

- 1)  $\Sigma H_i = 0; H_A = 0$
- 2)  $\Sigma V_i = 0; V_A - q \times L = 0; \rightarrow V_A = q \times L$
- 3)  $\Sigma M_A = 0; M_A + q \times L \times L/2 = 0; \rightarrow M_A = -(q \times L^2)/2$

Pretpostavljeni smjer momenta oslonca je pogriješan pa je potrebno okrenuti smjer (slika 27).



Slika 27. MNT dijagram

Normalne sile – nema ih.

Transverzalne sile – oslonac A,  $T_Z = V_A = q \times L$  na djelu  $0 < z < L$ ,  $T_Z = q \times L - q \times z$  za  $z = L$ ,

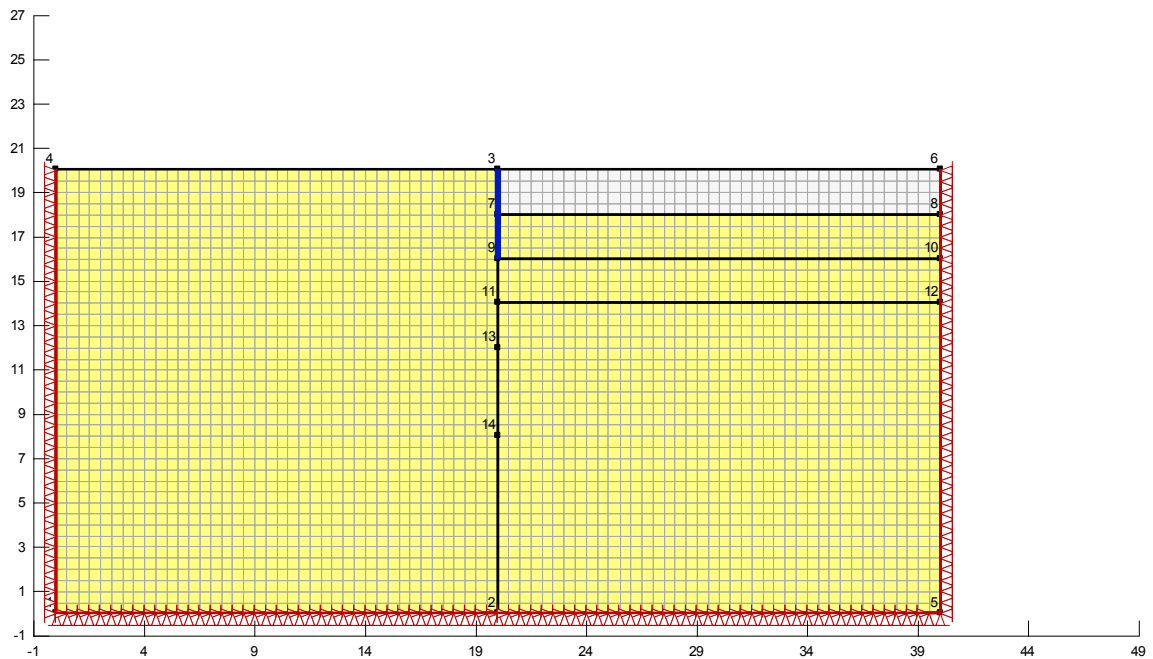
$$T = 0$$

Momenti savijanja – oslonac A,  $M_Z = -(q \times L^2)/2$  na  $0 < z < L$ ,  $M_Z = -(q \times L^2)/2 + (q \times z^2)/2$

Dijagram momenata opada, odnosno ide u pozitivnom smjeru, po zakonu kvadratne parabole za  $z = 0$ ,  $M_Z = -(q \times L^2)/2 + (q \times z^2)/2$ .



## Praktični dio



Slika 28. Profil tla u programu GeoStudio

U praktičnom djelu ovog rada provedena je analiza ponašanja konzolnog nosača za osiguranje iskopa jame različite dubine. Na Slika 28 prikazani je profil tla koji izrađen u preogramu GeoStudio 2012. Dimenzije profila su 40 metara u smjeru osi  $x$  te 20 metara u smjeru osi  $y$ . Prije početka same analize uvedeni su rubni uvjeti i koji su se dodijelili pojedinim elementima profila tla. Na slici se može vidjeti i simulacija iskopa jame dubine od 2 metra te nosača duljine 4 metra koji se koristio za analizu zaštite iskopa jame do 2 metra dubine. Analizirali su se slučajevi kod dubina iskopa od 2, 4 i 6 metara. Za osiguranje iskopa radili su se modeli za četiri različite vrste zaštite, a to su:

1. Zaštita AB pilotima promjera 30 cm
2. Zaštita dijafragmom debljine 30 cm
3. Zaštita profilima IPE 160 S355
4. Zaštita okruglim cijevnim profilima promjera 168,3 mm, debljine stijenki 4,5 mm, S355

Svojstva tla za koje se radila analiza su:

$$E = 4000 \text{ kPa}$$

$$c' = 5 \text{ kPa}$$

$$\rho = 25^\circ$$

$$\nu = 0,334$$

$$\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$$

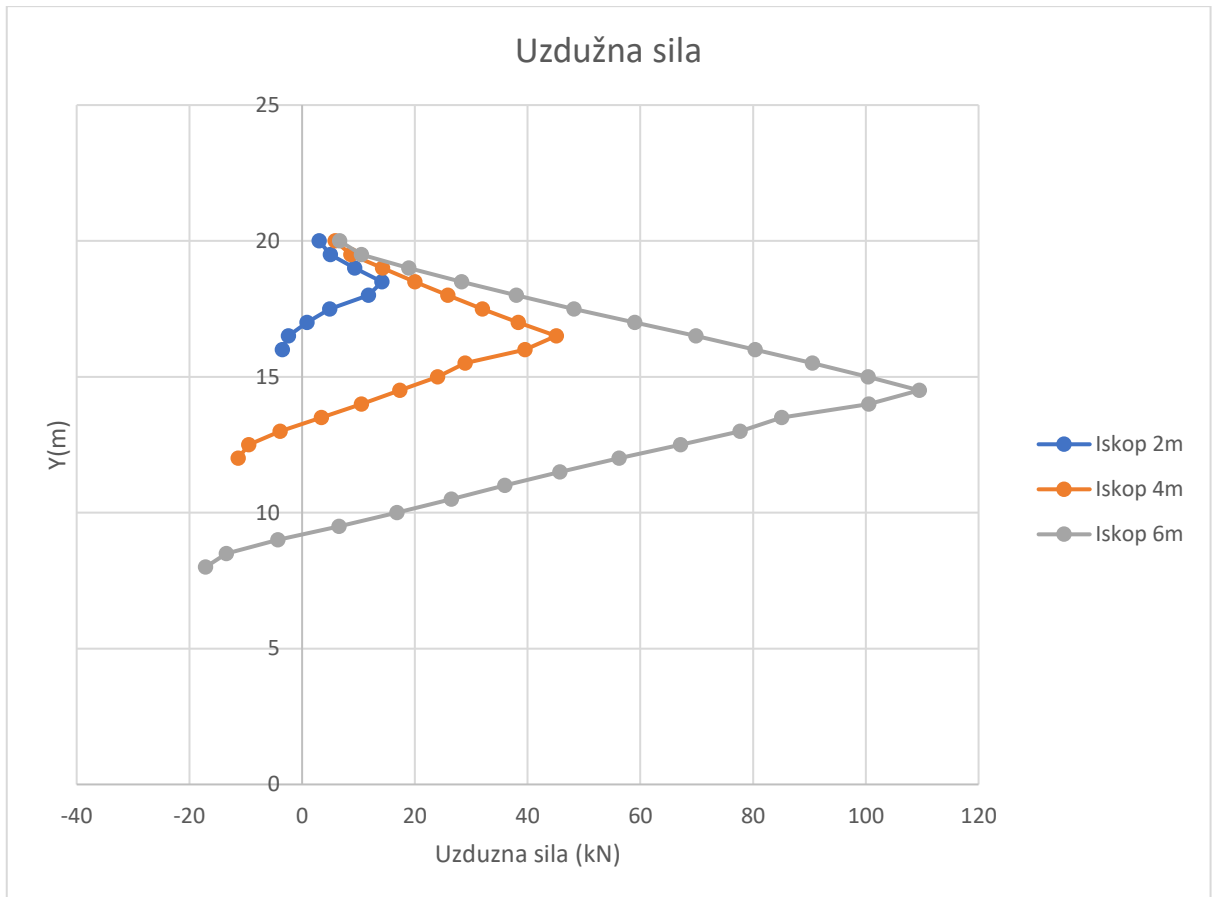
Izrada modela za zaštitu iskopa radila se u računalnom programu GeoStudio 2012 (Sigma/W). Za prikaz dijagrama koristio se program Excel iz paketa Microsoft Office u koji su se uvrštavali podaci koje smo dobili kao izračun u programu GeoStudio.

### **Zaštita iskopa AB pilotima promjera 30 cm**

Kako bi se započela izrada modela zaštite tla, potrebno je odrediti parametre nosača kako bi se moglo krenuti u daljnje proračune. Parametri koji su bili potrebni za analizu su Youngov modul elastičnosti koji za armiranobetonske pilote iznosi 30 000 000 kPa, površina poprečnog presjeka koja u ovom slučaju iznosi 0,070685835 m<sup>2</sup> te moment tromosti koji iznosi 0,000397608 m<sup>4</sup>.

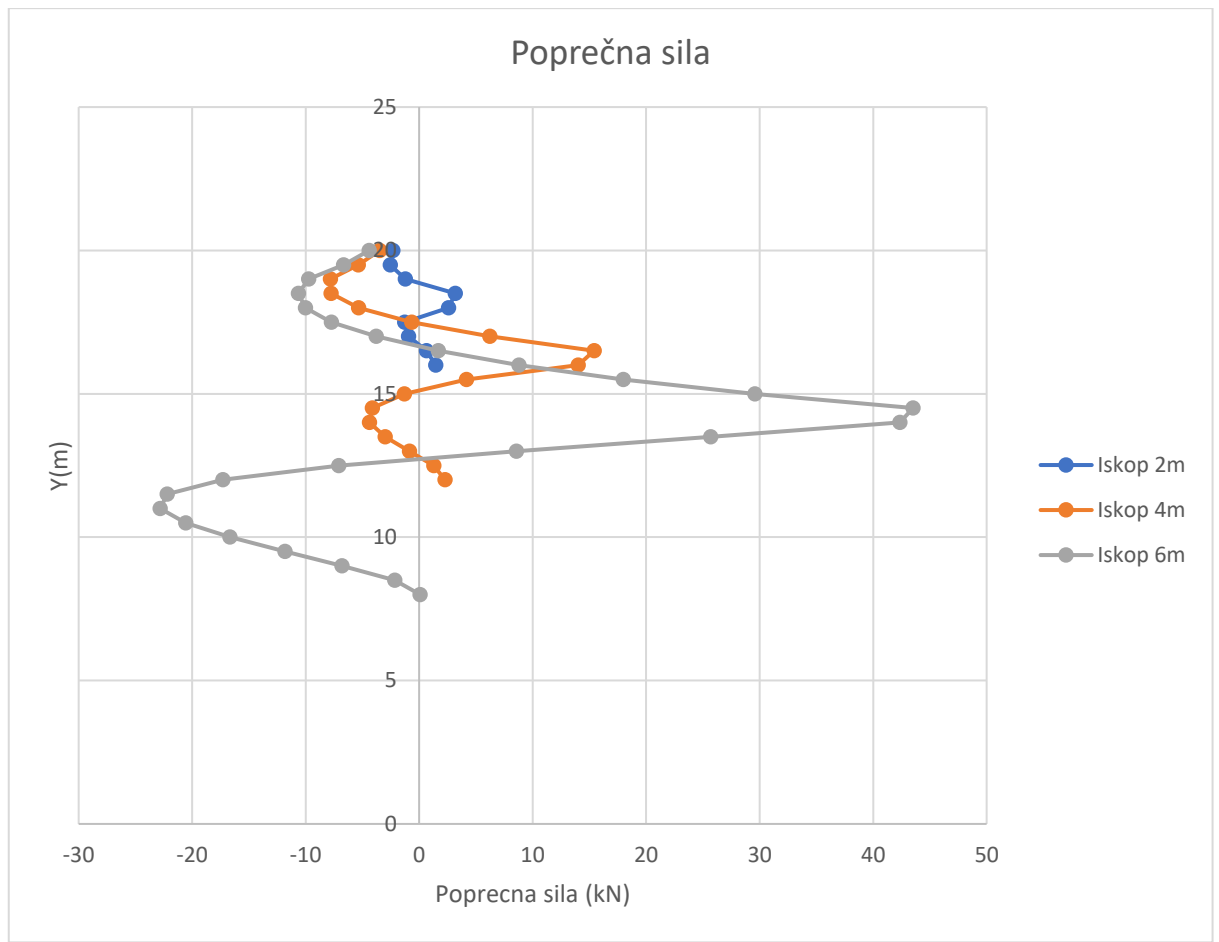
Nakon što se pokrenula analiza dobili su se rezultate s kojima su zatim izrađeni dijagrami za bolju preglednost podataka. Posebno su zanimljiva djelovanja uzdužnih i poprečnih sila, momenta savijanja i pomaka koji su se dogodili u smjeru osi  $x$ .

U dijagramu 1 vidljivo je kako se mijenjaju opterećenja od uzdužnih sila po dubini kod iskopa od 2, 4 i 6 metra, mora se napomenuti da su se piloti radili do dubine 2 puta veće od dubine iskopa. Kod iskopa od 2 metra najveća sila koja djeluje na pilot iznosi 14,175 kN na dubini od 1,5 metra od površine tla izvan iskopa. Iskop od 4 metra stvarao je još veće opterećenje na pilote koji su bili 8 metara duboki te je to opterećenje iznosilo 45,088 kN na dubini od 3,5 metra. Logičnim redosljednom tako je kod iskopa od 6 metara djelovala najveća sila u iznosu od 109,462 kN na dubini od 5,5 metara.



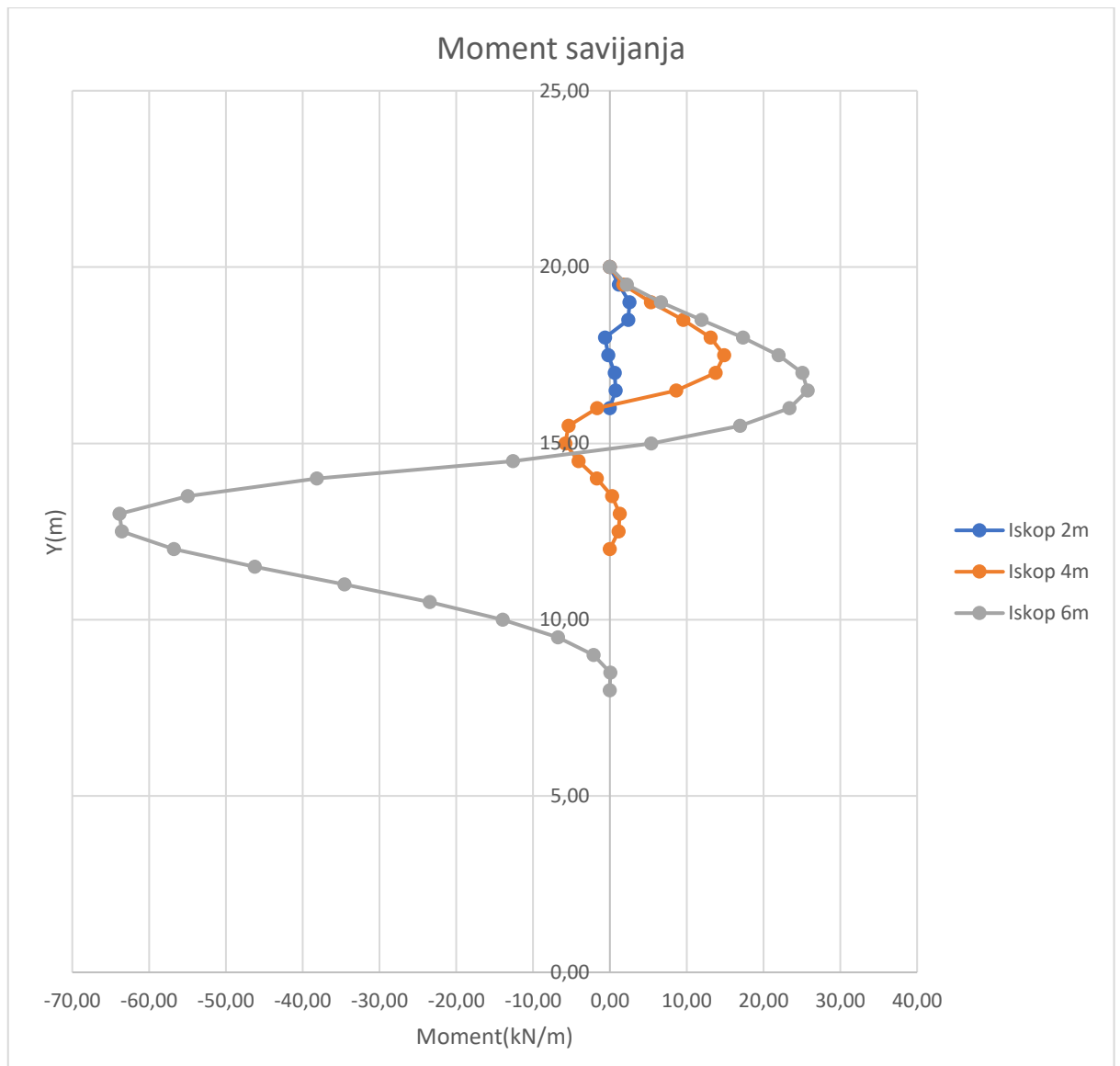
Dijagram 1. Uzdužna sila

Promatrano je i djelovanje poprečnih sila koje su se javile na pilotima te se iz dijagrama sve promjene sila vide po dubini. Na iskopu dubine do 2 metra najveća poprečna sila iznosila je 3,191 kN na dubini od 1,5 metra. Iskop od 4 metra stvorio je veće naprezanje od plićeć iskopa te je najveća poprečna sila koja se javila iznosila 15,415 kN na dubini od 3,5 metra. Iskop od 6 metara stvorio je najveće sile koje su djelovale na pilote u iznosu od 43,524 kN na dubini od 5,5 metara.



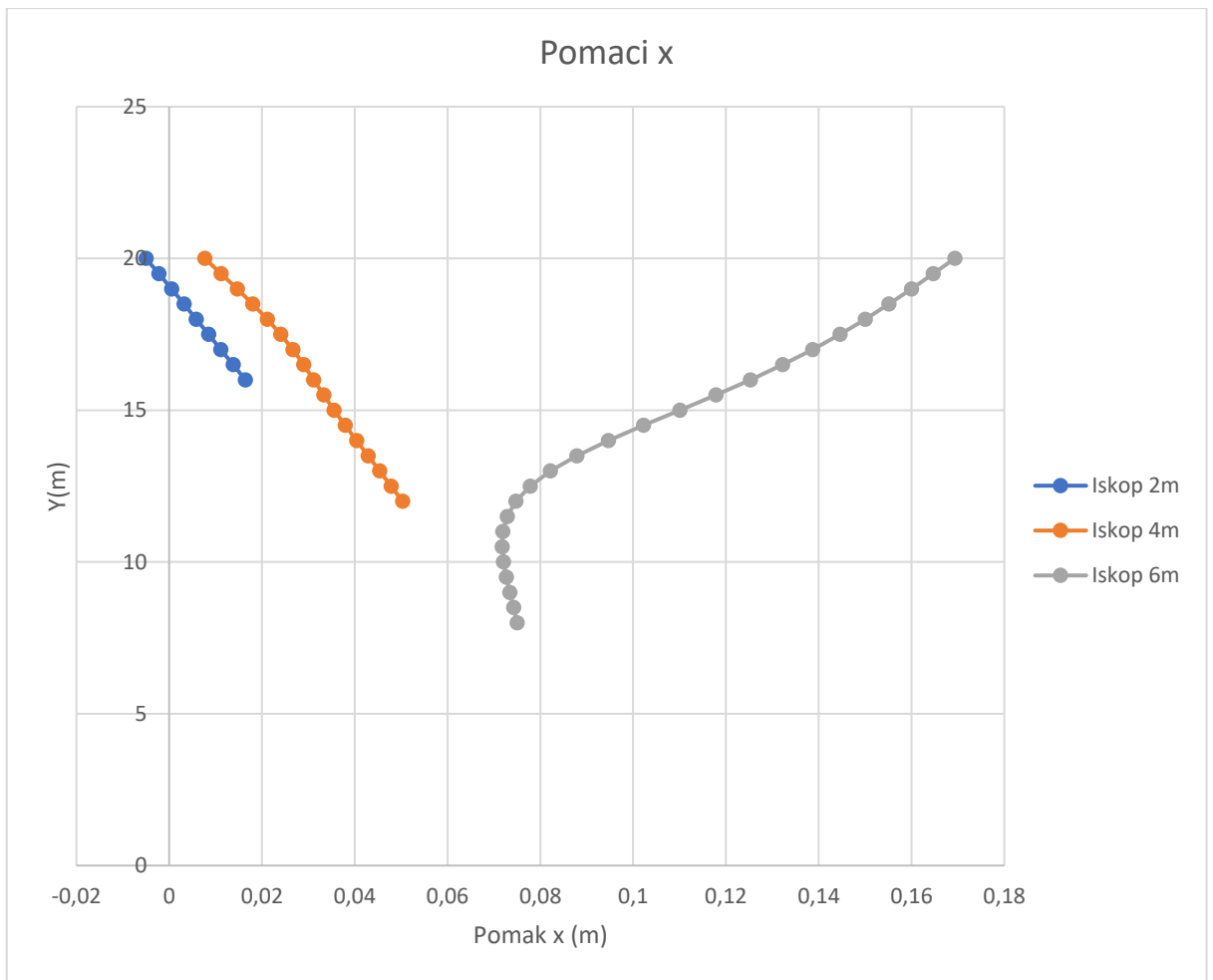
Dijagram 2. Poprečna sila

Posebno zanimljiv je dijagram 3 koji prikazuje momente savijanja koji su djelovali na pilote te je vidljivo kako se najveći momenti ne pojavljuju na istim dubinama kao što su se javljale najveće uzdužne i poprečne sile. Kod iskopa od 2 metra, najveći moment savijanja iznosi 2,556 kN/m na dubini od 1 metra. Najveći moment savijanja kod iskopa od 4 metra iznosi 14,881 kN/m na dubini od 2,5 metra. Kod iskopa od 6 metra stvarao se i najveći moment koji je djelovao na pilote, a iznosi 63,839 kN/m na dubini od 7 metra.



Dijagram 3. Moment savijanja

Izradio se i dijagram pomaka po osi x koji približava jasniju sliku kako bi se ponašali piloti koji osiguravaju iskop pri određenim naprezanjima koje djeluju na njih. Kod iskopa od 2 metra najveći pomak pilota dogodio se na dubini od 4 metra i iznosio je 0,01642 metra odnosno 1,642 centimetra. Dublji iskop rezultirao je i većim pomacima pilota, pa tako kod iskopa od 4 metra najveći pomak iznosio je 0,05033 metar ili 5,033 centimetar na dubini od 8 metara. Logičnim slijedom kod iskopa od 6 metara javio se i najveći pomak u iznosu od 0,16934 metra ili 16,934 centimetra na dubini od 0 metra ili na samoj površini terena koji nije zahvaćen iskopom.



Dijagram 4. Pomaci u smjeru x

Tablica 1. Prikaz maksimalnog naprezanja

AB piloti fi 30	
Dubina iskopa [m]	$\sigma_{maks}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]
2	0,005479
4	0,027421
6	0,085658

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{W}$$

$$A = 706,858 \text{ cm}^2$$

$$W = \frac{r^3 \pi}{4} = \frac{15^3 \pi}{4} = 2650,72 \text{ cm}^3$$

Dubina iskopa 2 m

$$N = 3,19135 \text{ kN}$$

$$M = 2,5565 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{3,19135 \text{ kN}}{706,858 \text{ cm}^2} + \frac{2,5565 \text{ kNcm}}{2650,72 \text{ cm}^3} = 0,005479 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Potrebna armatura je suviše velika.

Dubina iskopa 4 m

$$N = 15,4145 \text{ kN}$$

$$M = 14,8812 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{15,4145 \text{ kN}}{706,858 \text{ cm}^2} + \frac{14,8812 \text{ kNcm}}{2650,72 \text{ cm}^3} = 0,027421 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Potrebna armatura je suviše velika.

Dubina iskopa 6 m

$$N = 43,5243 \text{ kN}$$

$$M = 68,8388 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{43,5243 \text{ kN}}{706,858 \text{ cm}^2} + \frac{68,8388 \text{ kNcm}}{2650,72 \text{ cm}^3} = 0,085658 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

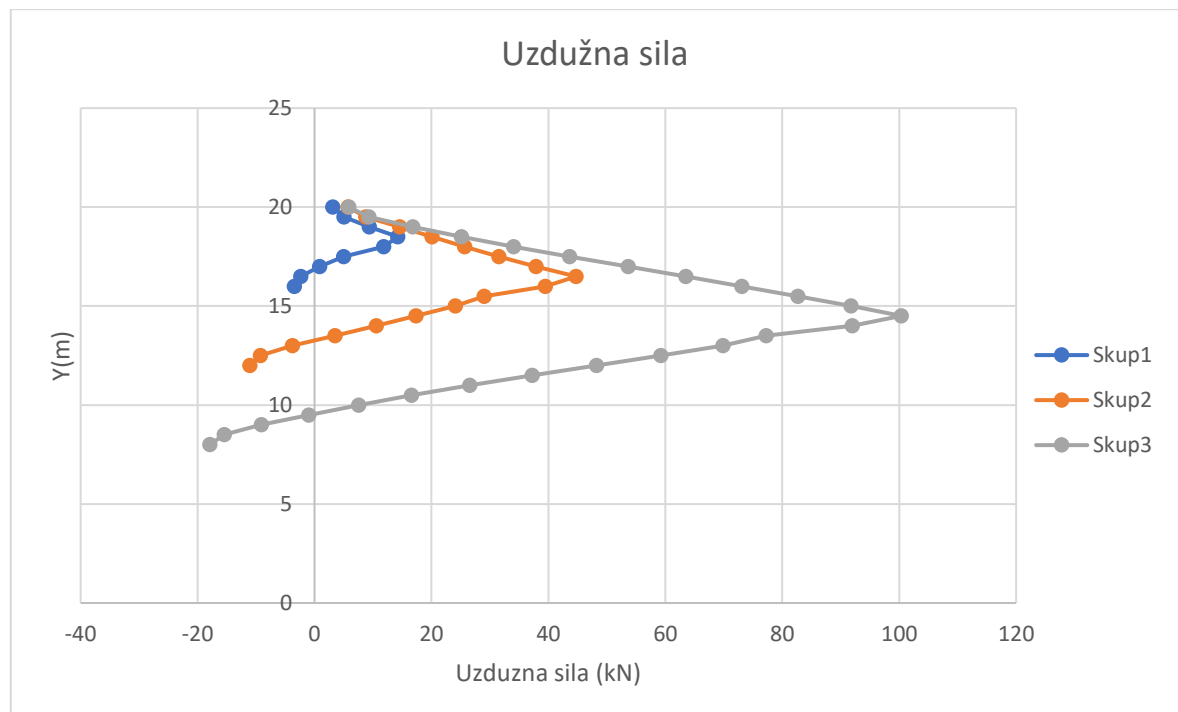
Potrebna armatura je suviše velika.

## Zaštita dijafragmom debljine 30 cm

Parametri nosača odnosno dijafragme koja se koristila u daljnjim proračunima su Youngov modul elastičnosti koji za armiranobetonске dijafragme iznosi 30 000 000 kPa, površina poprečnog presjeka koja u ovom slučaju iznosi 0,3 m<sup>2</sup> te moment tromosti koji iznosi 0,00225 m<sup>4</sup>.

Nakon što se pokrenula analiza, dobili su se rezultati s kojima su izrađeni dijagrami za bolju preglednost podataka. Posebno zanimljiva su djelovanja uzdužnih i porečnih sila, momenta savijanja i pomaka koji su se dogodili u smjeru osi *x*.

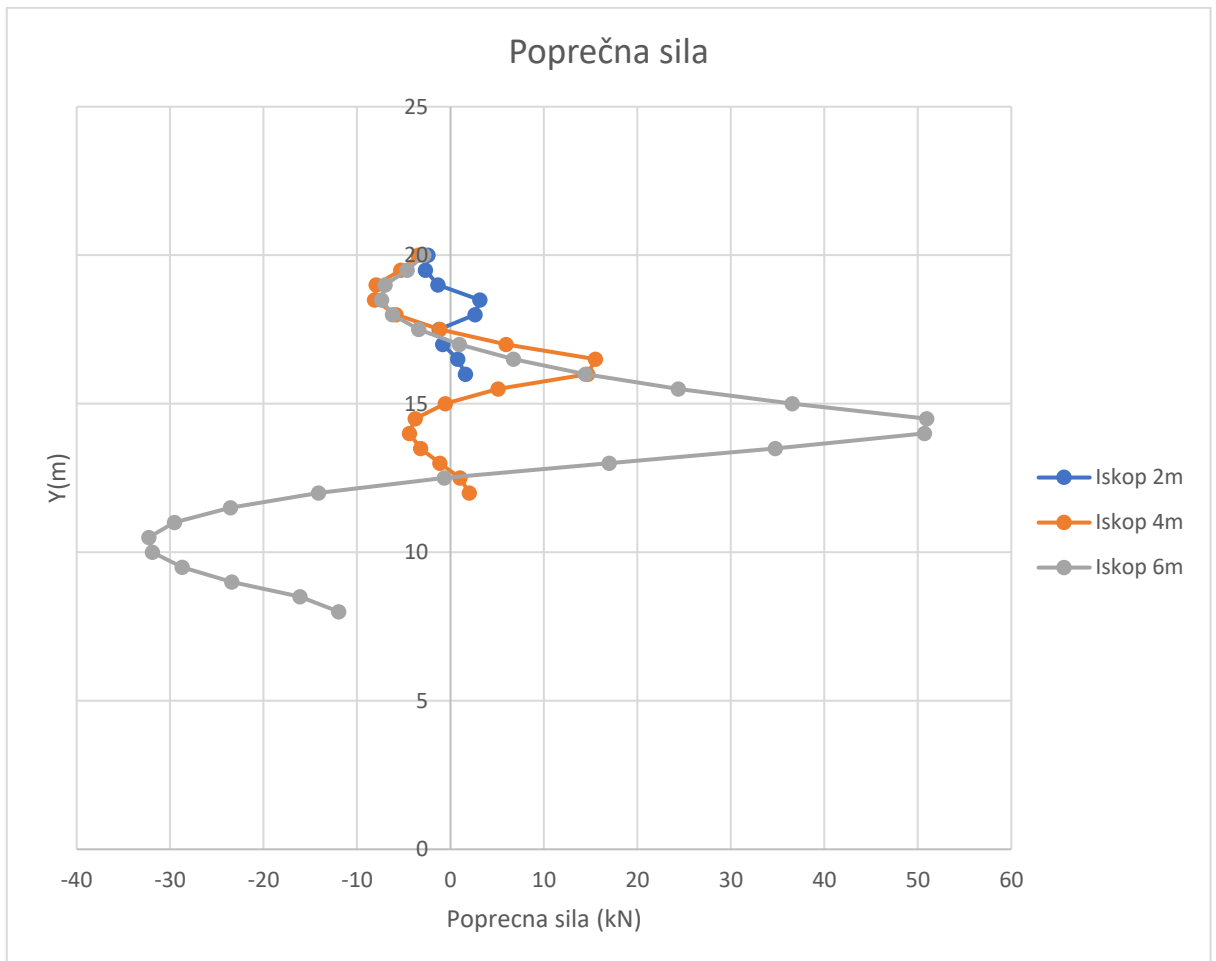
U dijagramu 5 vidljivo je kako se mijenjaju opterećenja od uzdužnih sila po dubini kod iskopa od 2, 4 i 6 metra, mora se napomenuti da se dijafragma radila do dubine 2 puta veće od dubine iskopa. Kod iskopa od 2 metra najveća sila koja djeluje na dijafragmu iznosi 14,244 kN na dubini od 1,5 metra od površine tla izvan iskopa. Iskop od 4 metra stvarao je još veće opterećenje na dijafragmu koja je 8 metara duboka te je to opterećenje iznosilo 44,745 kN na dubini od 3,5 metra. Logičnim redoslijedom tako je kod iskopa od 6 metara djelovala najveća sila u iznosu od 100,368 kN na dubini od 5,5 metara.



Dijagram 5. Uzdužna sila

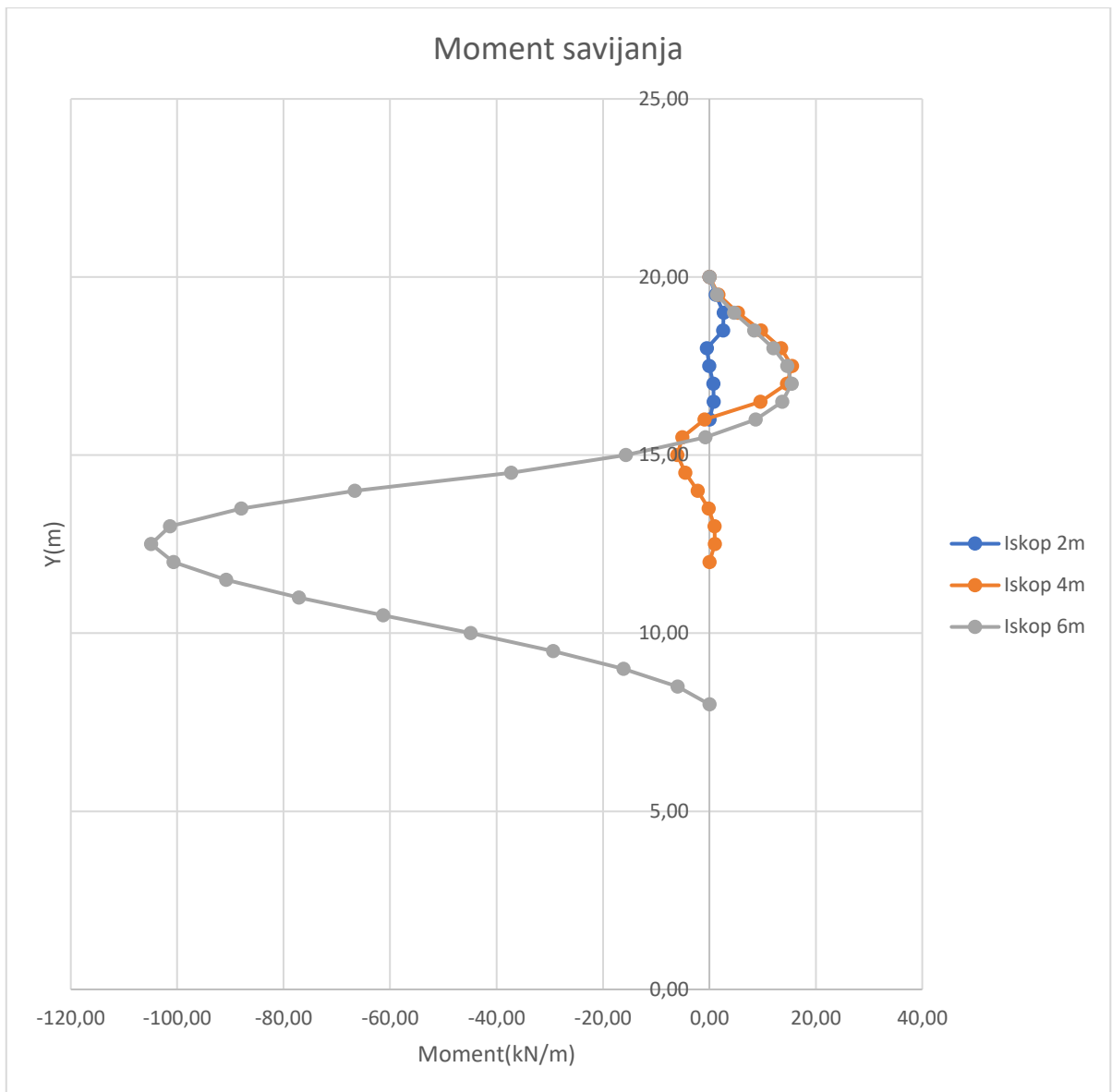


Promatrano je i djelovanje poprečnih sila koje su se javile na dijafragmu te se iz dijagrama sve promjene sila vide po dubini. Na iskopu dubine do 2 metra najveća poprečna sila iznosila je 3,139 kN na dubini od 1,5 metra. Iskop od 4 metra stvorio je veće naprezanje od plićeg iskopa te je najveća poprečna sila koja se javila iznosila 15,494 kN na dubini od 3,5 metra. Iskop od 6 metara stvorio je najveće sile koje su djelovale na dijafragmu u iznosu od 50,957 kN na dubini od 5,5 metara.



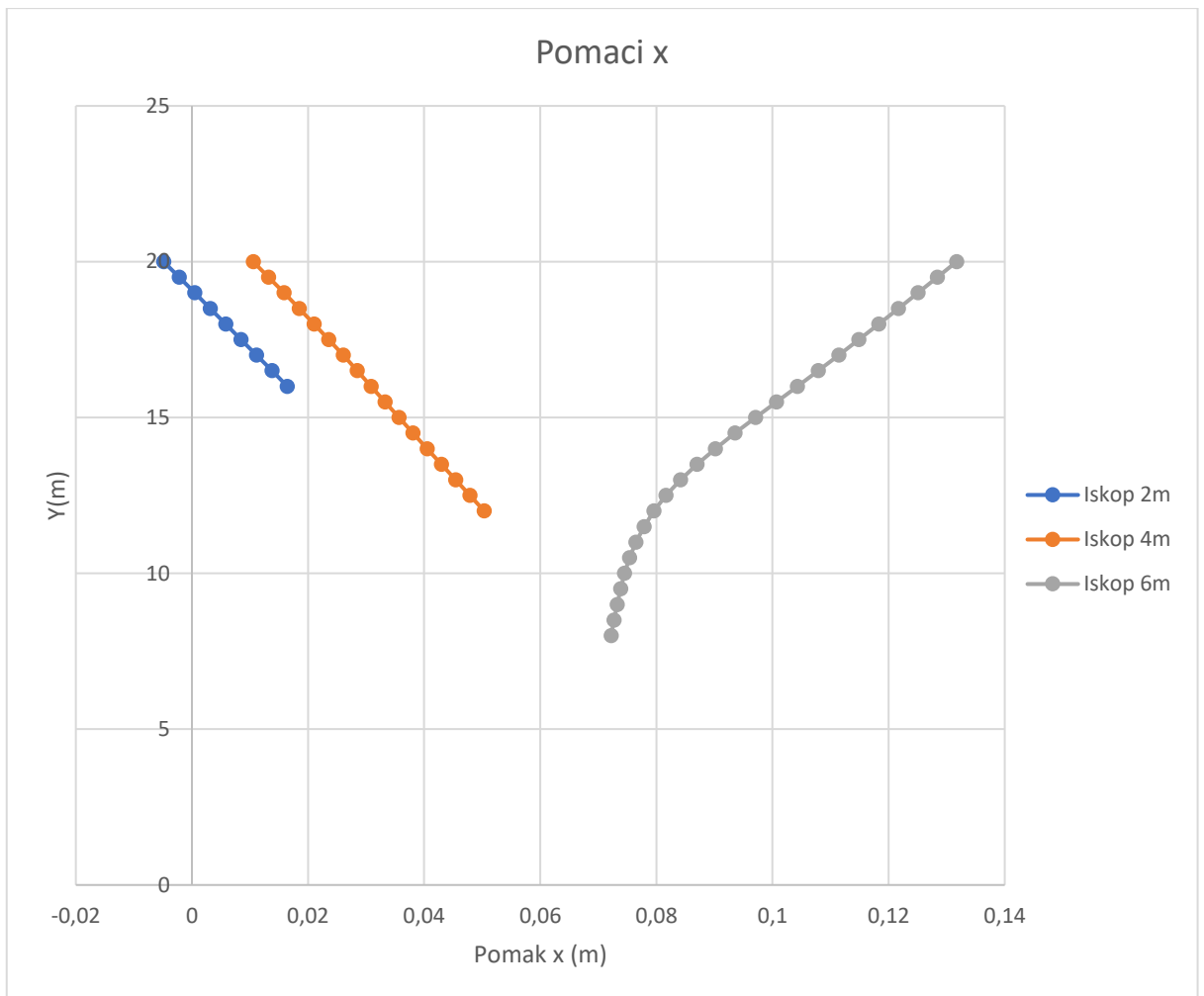
Dijagram 6. Poprečna sila

Dijagram 7 prikazuje momente savijanja koji su djelovali na dijafragmu te je vidljivo kako se najveći momenti ne pojavljuju na istim dubinama kao što su se javljale najveće uzdužne i poprečne sile. Kod iskopa od 2 metra, najveći moment savijanja iznosi 2,671 kN/m na dubini od 1 metra. Najveći moment savijanja kod iskopa od 4 metra iznosi 15,499 kN/m na dubini od 2,5 metra. Kod iskopa od 6 metra stvarao se i najveći moment koji je djelovao na dijafragmu, a iznosi 104,926 kN/m na dubini od 7,5 metra.



Dijagram 7. Moment savijanja

Dijagram 8, dijagram pomaka po osi x koji približava sliku kako bi se ponašala dijafragma koja osigurava iskop pri određenim naprezanjima koja djeluju na nju. Kod iskopa od 2 metra najveći pomak dijafragme dogodio se na dubini od 4 metra i iznosio je 0,01643 metra odnosno 1,643 centimetra. Dublji iskop rezultirao je i većim pomacima dijafragme, pa tako kod iskopa od 4 metra najveći pomak iznosio je 0,05035 metar ili 5,035 centimetar na dubini od 8 metara. Logičnim slijedom kod iskopa od 6 metara javio se i najveći pomak u iznosu od 0,1317 metra ili 13,17 centimetra na dubini od 0 metra ili na samoj površini terena koji nije zahvaćen iskopom.



Dijagam 8. Pomaci u smjeru x

Tablica 2. Prikaz maksimalnog naprezanja

Dijafragma	
Dubina iskopa [m]	$\sigma_{maks}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]
2	0,001082
4	0,005371
6	0,018385

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{W}$$

$$A = 3000 \text{ cm}^2$$

$$W = \frac{b * h^2}{6} = \frac{30 * 100^2}{6} = 75000 \text{ cm}^3$$

Dubina iskopa 2 m

$$N = 3,13891 \text{ kN}$$

$$M = 2,671 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{3,13891 \text{ kN}}{3000 \text{ cm}^2} + \frac{2,671 \text{ kNcm}}{75000 \text{ cm}^3} = 0,001082 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Potrebna armatura je suviše velika.

Dubina iskopa 4 m

$$N = 15,4935 \text{ kN}$$

$$M = 15,499 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{15,4935 \text{ kN}}{3000 \text{ cm}^2} + \frac{15,499 \text{ kNcm}}{75000 \text{ cm}^3} = 0,005371 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Potrebna armatura je suviše velika.

Dubina iskopa 6 m

$$N = 50,9567 \text{ kN}$$

$$M = 104,926 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{50,9567 \text{ kN}}{3000 \text{ cm}^2} + \frac{104,926 \text{ kNcm}}{75000 \text{ cm}^3} = 0,018385 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

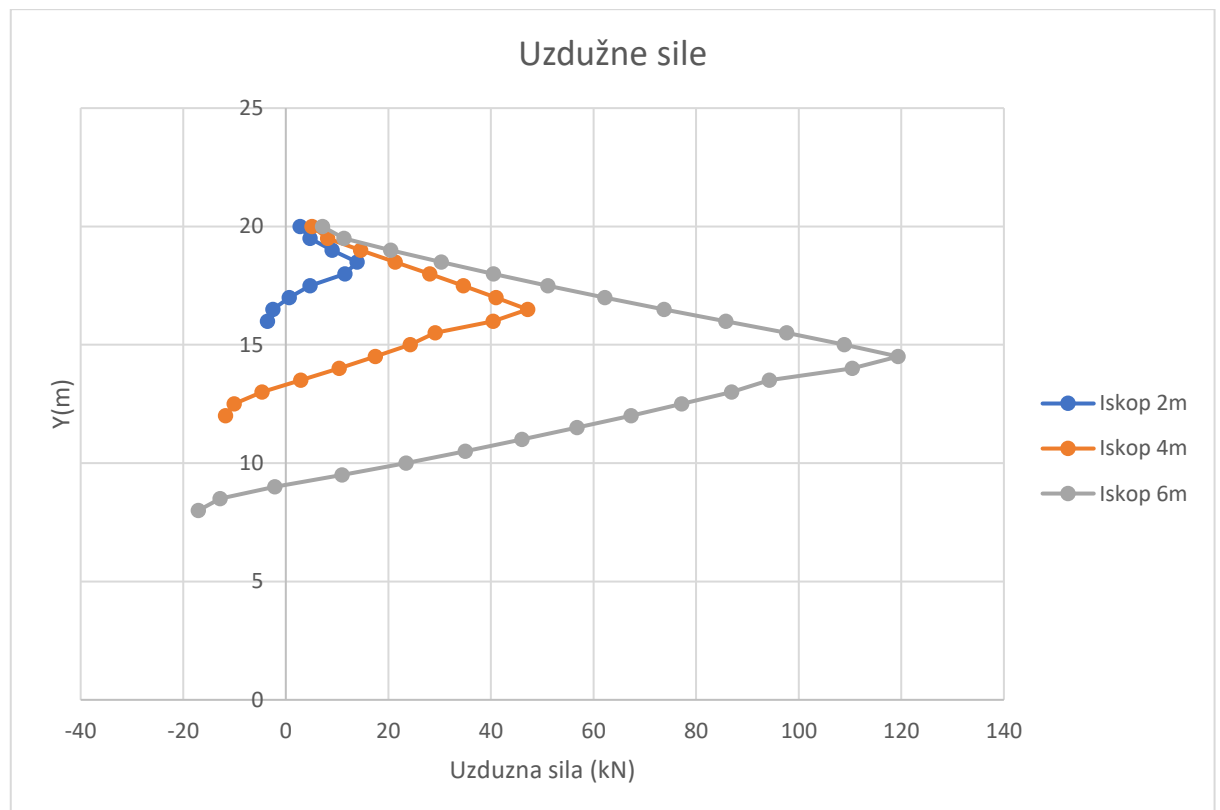
Potrebna armatura je suviše velika.

## Zaštita profilima IPE 160 S355

Parametre nosača odnosno IPE 160 profila koji su se koristili u daljnjim proračunima su Youngov modul elastičnosti koji iznosi 210 000 000 kPa, površina poprečnog presjeka koja u ovom slučaju iznosi 0,002009 m<sup>2</sup> te moment tromosti koji iznosi 0,000008693 m<sup>4</sup>.

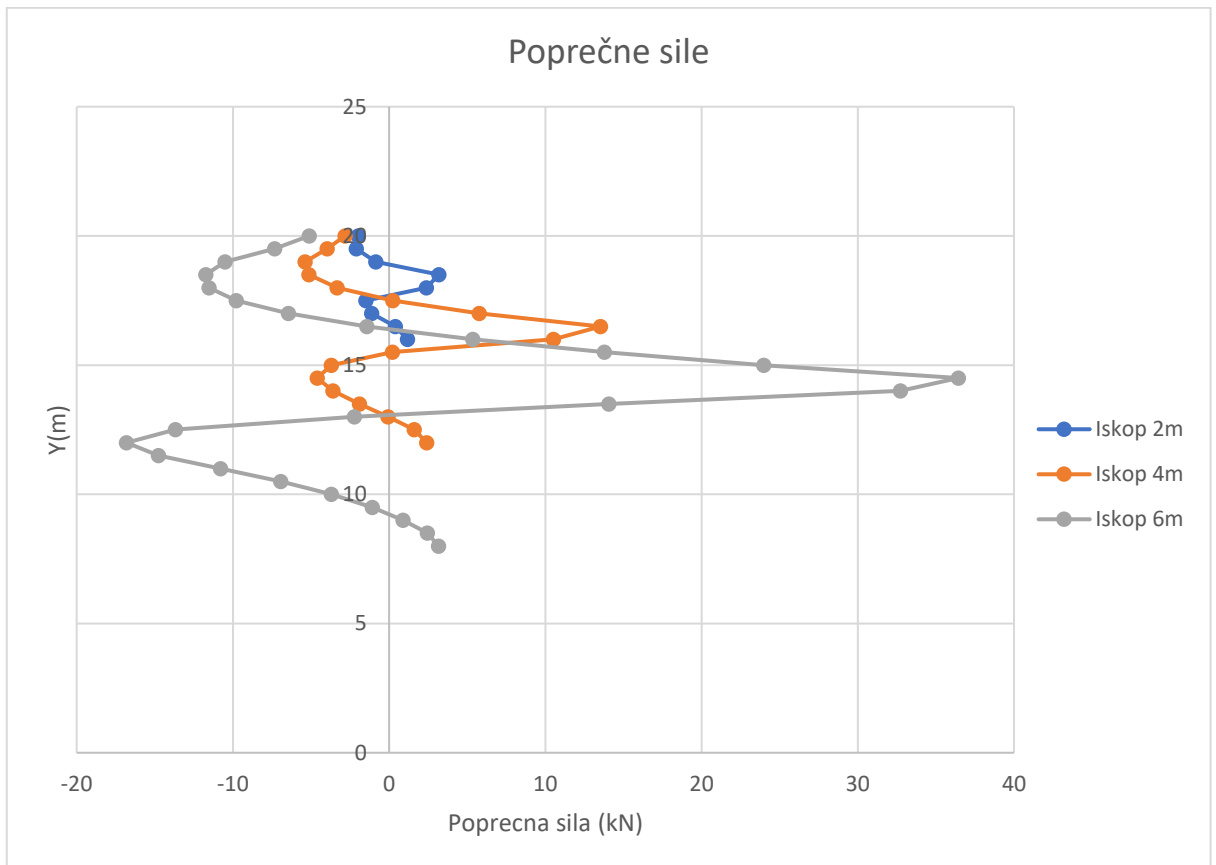
Nakon što se pokrenula analiza, dobili su se rezultati s kojima su izrađeni dijagrami za bolju preglednost podataka. Posebno zanimljiva su djelovanja uzdužnih i porečnih sila, momenta savijanja i pomaka koji su se dogodili u smjeru osi *x*.

U dijagramu 9 vidljivo je kako se mijenjaju opterećenja od uzdužnih sila po dubini kod iskopa od 2, 4 i 6 metra, mora se napomenuti da se IPE 160 profil radio do dubine 2 puta veće od dubine iskopa. Kod iskopa od 2 metra najveća sila koja djeluje na IPE 160 profil iznosi 13,900 kN na dubini od 1,5 metra od površine tla izvan iskopa. Iskop od 4 metra stvarao je još veće opterećenje na IPE 160 profil koji je 8 metara dubok te je to opterećenje iznosilo 47,156 kN na dubini od 3,5 metra. Logičnim redoslijedom tako je kod iskopa od 6 metara djelovala najveća sila u iznosu od 119,389 kN na dubini od 5,5 metara.



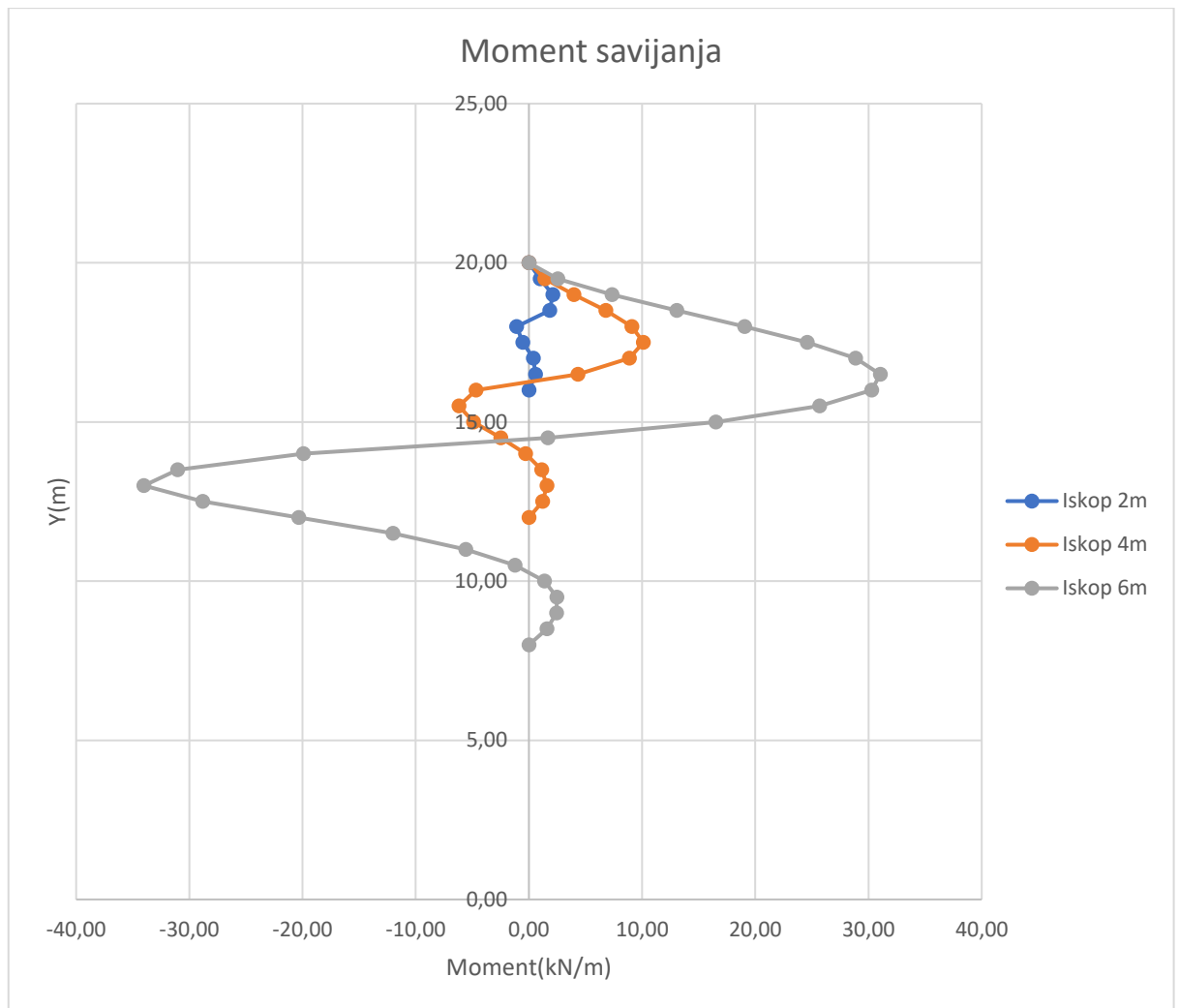
Dijagram 9. Uzdužne sile

Promatrano je i djelovanje poprečnih sila koje su se javile na IPE 160 profil te se iz dijagrama sve promjene sila vide po dubini. Na iskopu dubine do 2 metra najveća poprečna sila iznosila je 3,188 kN na dubini od 1,5 metra. Iskop od 4 metra stvorio je veće naprezanje od plićeeg iskopa te je najveća poprečna sila koja se javila iznosila 13,540 kN na dubini od 3,5 metra. Iskop od 6 metara stvorio je najveće sile koje su djelovale na IPE 160 profil u iznosu od 36,440 kN na dubini od 5,5 metara.



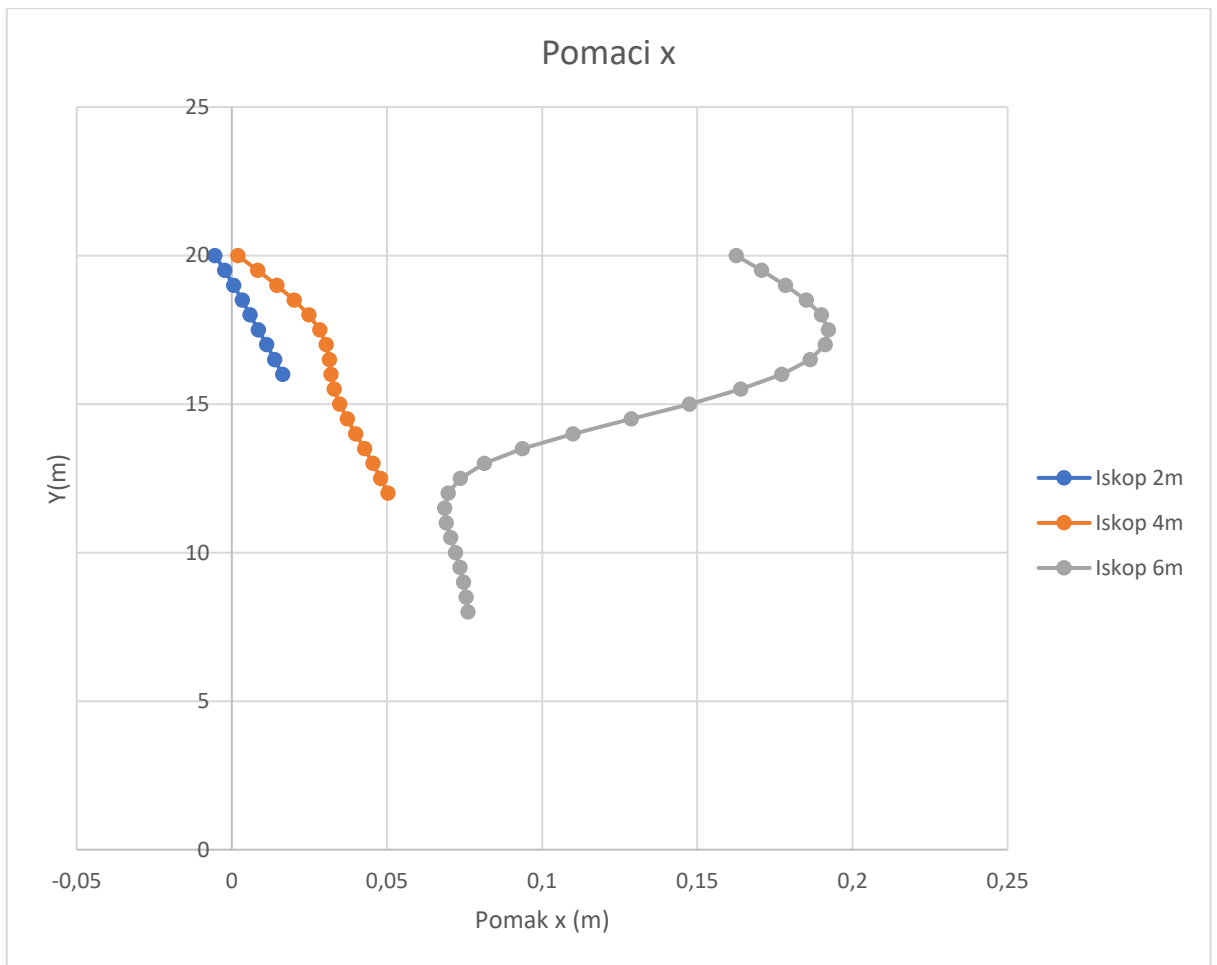
Dijagram 10. Poprečne sile

Dijagram 11 prikazuje momente savijanja koji su djelovali na IPE 160 profil te je vidljivo kako se najveći momenti ne pojavljuju na istim dubinama kao što su se javljale najveće uzdužne i poprečne sile. Kod iskopa od 2 metra, najveći moment savijanja iznosi 2,11kN/m na dubini od 1 metra. Najveći moment savijanja kod iskopa od 4 metra iznosi 10,111 kN/m na dubini od 2,5 metra. Kod iskopa od 6 metra stvarao se i najveći moment koji je djelovao na IPE 160 profil, a iznosi 34,006 kN/m na dubini od 7 metra.



Dijagram 11. Moment savijanja

Dijagram 12, dijagram pomaka po osi x koji približava sliku kako bi se ponašala IPE 160 profil kojima se osigurava iskop pri određenim napreznjima koje djeluju na njih. Kod iskopa od 2 metra najveći pomak IPE 160 profila dogodio se na dubini od 4 metra i iznosio je 0,01637 metra odnosno 1,637 centimetra. Dublji iskop rezultirao je i većim pomacima IPE 160 profila, pa tako kod iskopa od 4 metra najveći pomak iznosio je 0,05029 metar ili 5,029 centimetar na dubini od 8 metara. Logičnim slijedom kod iskopa od 6 metara javio se i najveći pomak u iznosu od 0,19231 metra ili 19,231 centimetra na dubini od 2,5 metra.



Dijagram 12. Pomaci u smjeru x

Tablica 3. Prikaz dopuštenog i maksimalnog naprezanja

IPE 160, S355			
Dubina iskopa [m]	$\sigma_{maks}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{dop}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{dop}/\sigma_{maks}$
2	2,095208	23,7	11,311524
4	9,975715	23,7	2,375770
6	33,098106	23,7	0,716053

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{W}$$

$$A = 20.09cm^2$$

$$W = 108.7cm^3$$



Dubina iskopa 2 m

$$N = 3,188 \text{ kN}$$

$$M = 210,5 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{3,188 \text{ kN}}{20,09 \text{ cm}^2} + \frac{210,5 \text{ kNcm}}{108,7 \text{ cm}^3} = 2,095 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{35,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{1,5}$$

$$\sigma_{dop} = 23,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{dop}} = \frac{2,095 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{23,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 11,311524$$

U ovom je slučaju prekoračena vrijednost dopuštenih naprezanja pa je potrebno ojačati čelični nosivi element.

Dubina iskopa 4 m

$$N = 13,54 \text{ kN}$$

$$M = 1011,1 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{13,54 \text{ kN}}{20,09 \text{ cm}^2} + \frac{1011,1 \text{ kNcm}}{108,7 \text{ cm}^3} = 9,976 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{35,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{1,5}$$

$$\sigma_{dop} = 23,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{dop}} = \frac{9,976 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{23,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 2,375770$$

U ovom je slučaju prekoračena vrijednost dopuštenih naprezanja pa je potrebno ojačati čelični nosivi element.

Dubina iskopa 6 m

$$N = 36,44 \text{ kN}$$

$$M = 3400,6 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{36,44 \text{ kN}}{20,09 \text{ cm}^2} + \frac{3400,6 \text{ kNcm}}{108,7 \text{ cm}^3} = 33,098 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{35,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{1,5}$$

$$\sigma_{dop} = 23,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

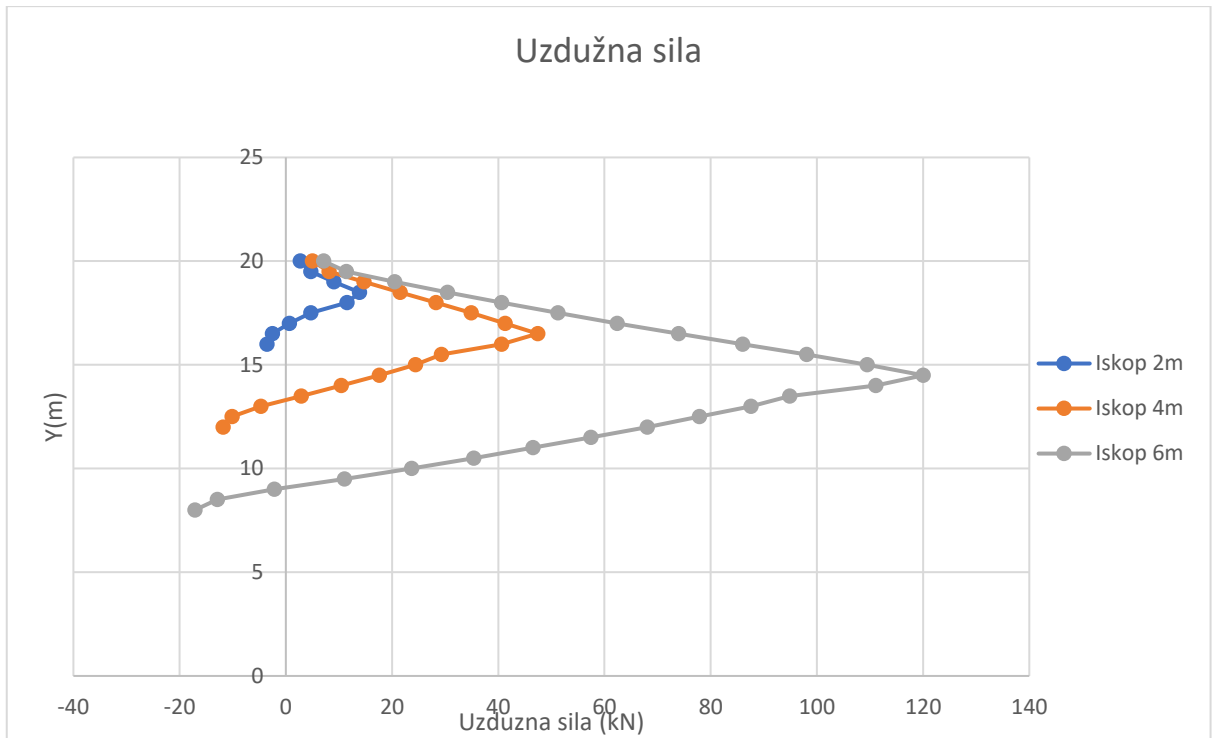
$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{dop}} = \frac{33,098 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{23,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 0,716053$$

### **Zaštita okruglim cijevnim profilima promjera 168,3 mm, debljine stjenki 4,5 mm, S355**

Parametre nosača odnosno okruglog cijvenog profila koje smo koji su korišteni u daljnjim proračunima su Youngov modul elastičnosti koji iznosi 210 000 000 kPa, površina poprečnog presjeka koja u ovom slučaju iznosi 0,00232 m<sup>2</sup> te moment tromosti koji iznosi 0,00000777 m<sup>4</sup>.

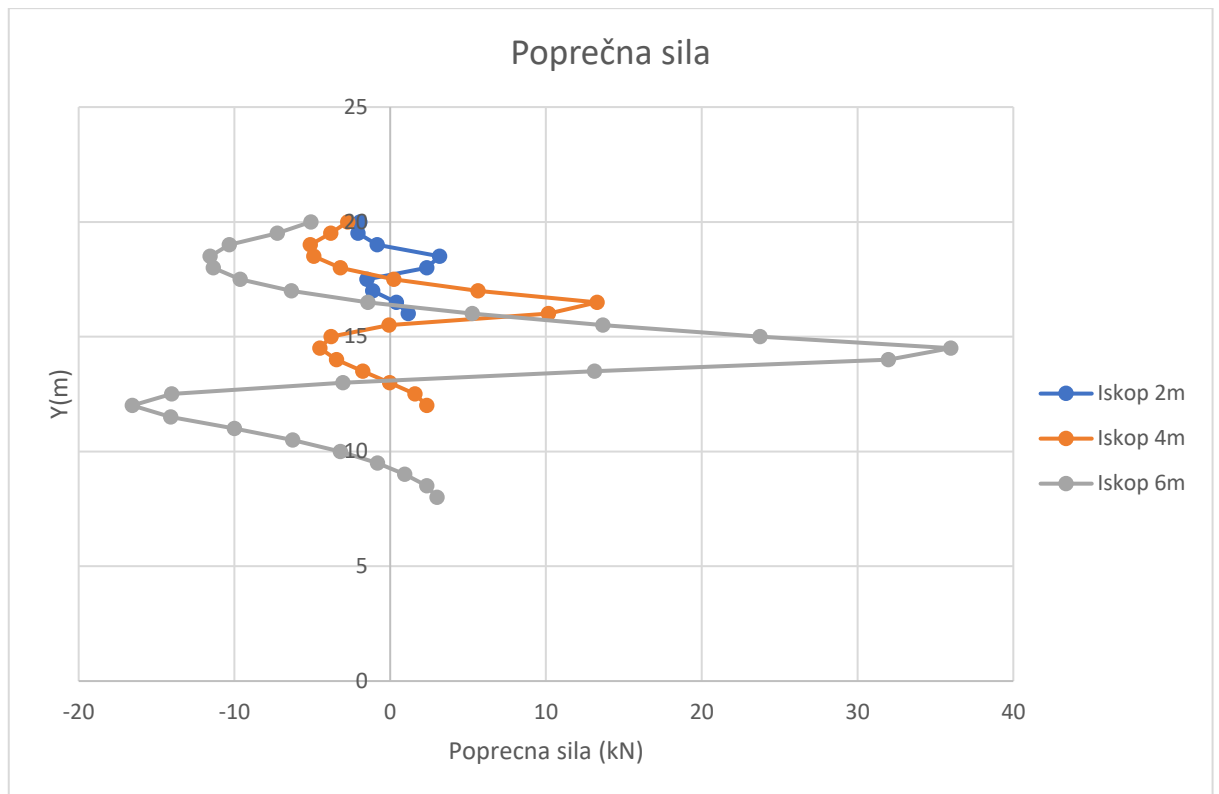
Nakon što se pokrenula analiza, dobili su se rezultati s kojima su se zatim izradili dijagrami za bolju preglednost podataka. Posebno zanimljiva su djelovanja uzdužnih i porečnih sila, momenta savijanja i pomaka koji su se dogodili u smjeru osi *x*.

U dijagramu 13 vidljivo je kako se mijenjaju opterećenja od uzdužnih sila po dubini kod iskopa od 2, 4 i 6 metra, mora se napomenuti da se okrugli cijveni profil radio do dubine 2 puta veće od dubine iskopa. Kod iskopa od 2 metra najveća sila koja djeluje na okrugli cijveni profil iznosi 13,890 kN na dubini od 1,5 metra od površine tla izvan iskopa. Iskop od 4 metra stvarao je još veće opterećenje na okrugli cijveni profil koji je 8 metara dubok te je to opterećenje iznosilo 47,416 kN na dubini od 3,5 metra. Logičnim redosljednom tako je kod iskopa od 6 metara djelovala najveća sila u iznosu od 120,035 kN na dubini od 5,5 metara.



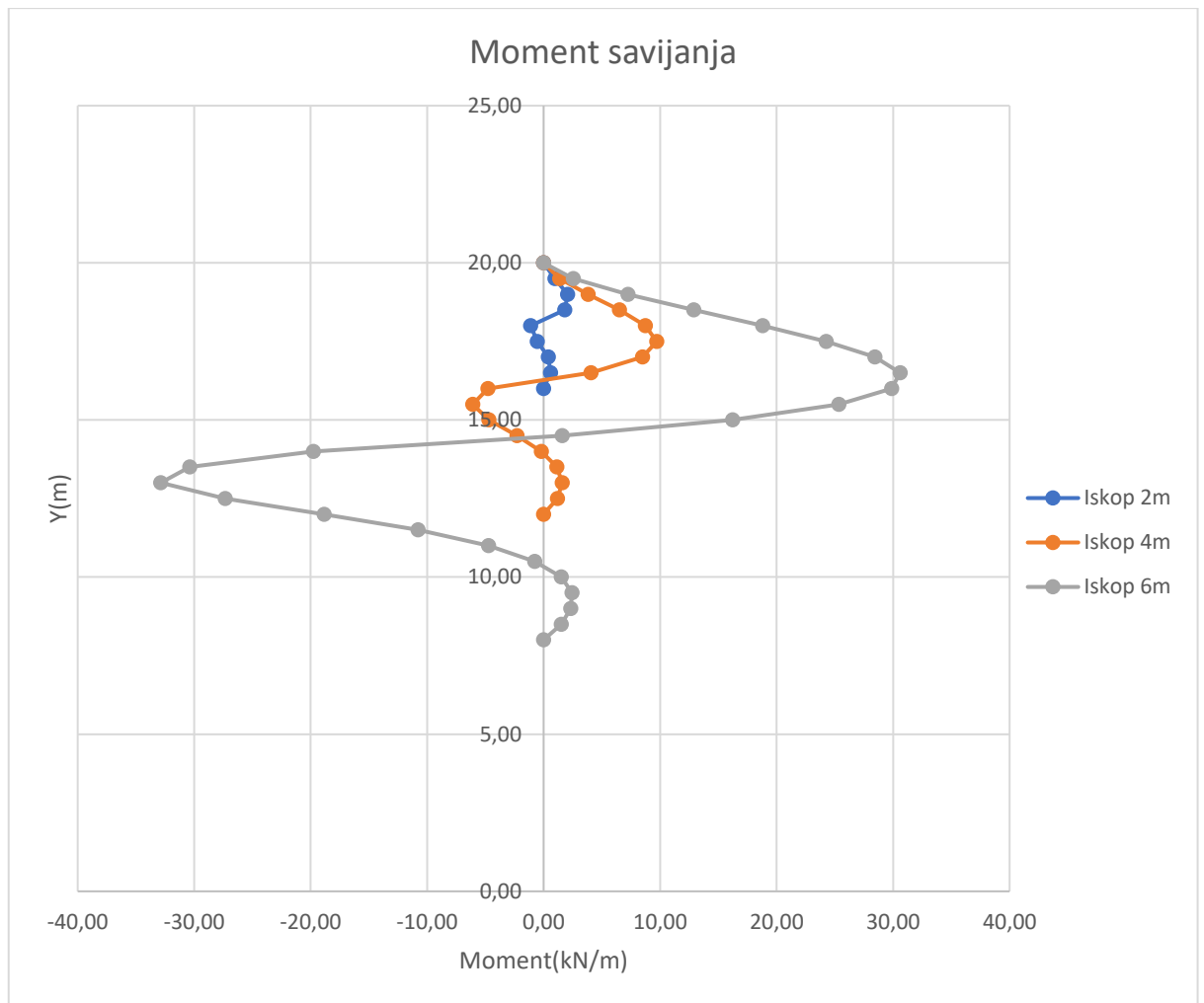
Dijagram 13. Uzdužna sila

Promatrano je i djelovanje poprečnih sila koje su se javile na okrugli cijevni profil te se iz dijagrama sve promjene sila vide po dubini. Na iskopu dubine do 2 metra najveća poprečna sila iznosila je 3,171 kN na dubini od 1,5 metra. Iskop od 4 metra stvorio je veće naprezanje od pliće iskopa te je najveća poprečna sila koja se javila iznosila 13,276 kN na dubini od 3,5 metra. Iskop od 6 metara stvorio je najveće sile koje su djelovale na okrugli cijevni profil u iznosu od 35,983 kN na dubini od 5,5 metara.



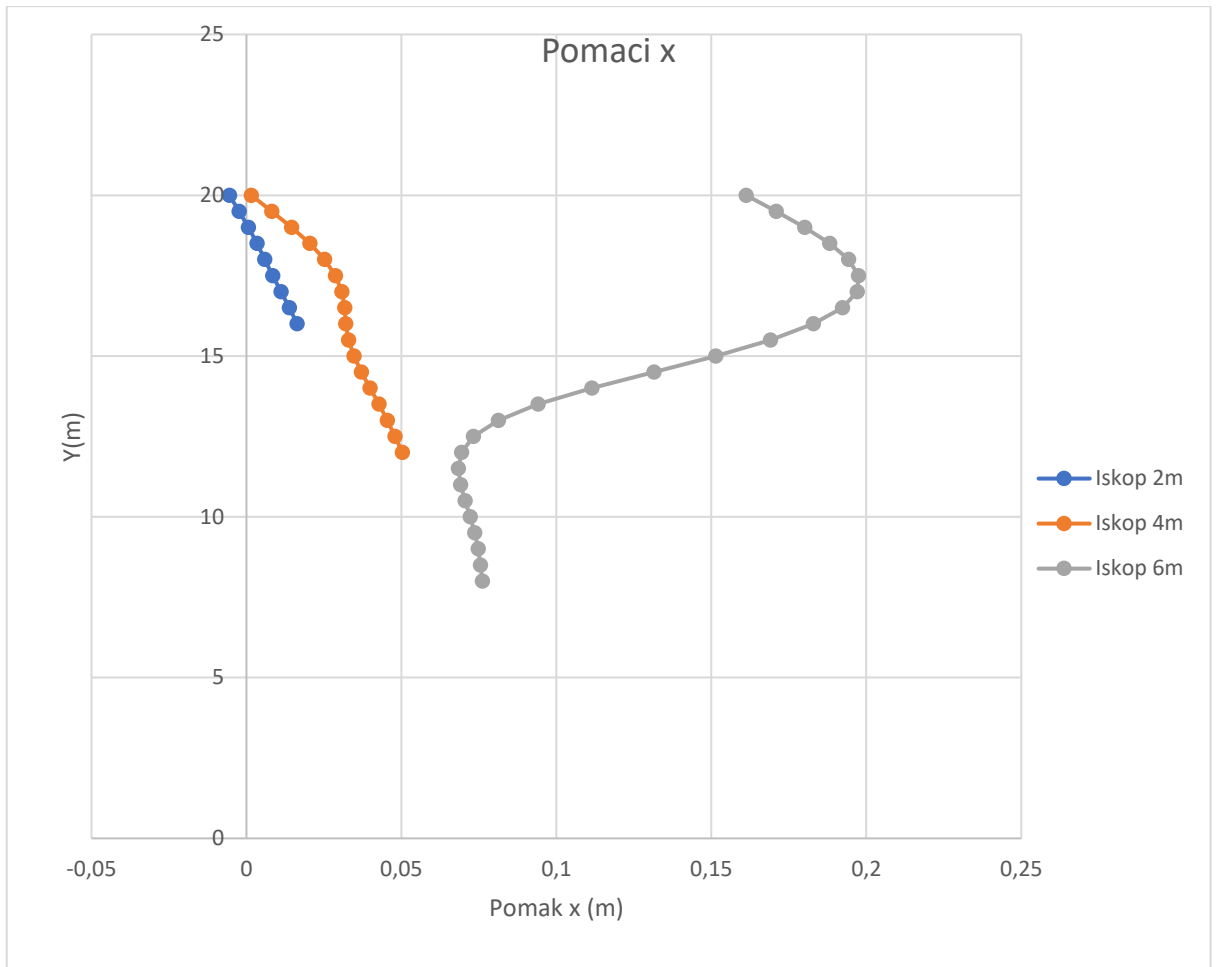
Dijagram 14. Poprečna sila

Dijagram 15 prikazuje momente savijanja koji su djelovali na okrugli cijevni profil te je vidljivo kako se najveći momenti ne pojavljuju na istim dubinama kao što su se javljale najveće uzdužne i poprečne sile. Kod iskopa od 2 metra, najveći moment savijanja iznosi 2,064 kN/m na dubini od 1 metra. Najveći moment savijanja kod iskopa od 4 metra iznosi 9,707 kN/m na dubini od 2,5 metra. Kod iskopa od 6 metra stvarao se i najveći moment koji je djelovao na okrugli cijevni profil, a iznosi 32,868 kN/m na dubini od 7 metra.



Dijagram 15. Moment savijanja

Dijagram 16, dijagram pomaka po osi x koji približava sliku kako bi se ponašali okrugli cijevni profili kojima se osigurava iskop pri određenim napreznjima koje djeluju na nju. Kod iskopa od 2 metra najveći pomak okruglog cijevnog profila dogodio se na dubini od 4 metra i iznosio je 0,016364 metra odnosno 1,6364 centimetra. Dublji iskop rezultirao je i većim pomacima okruglog cijevnog profila, pa tako kod iskopa od 4 metra najveći pomak iznosio je 0,050285 metar ili 5,0285 centimetar na dubini od 8 metara. Logičnim slijedom kod iskopa od 6 metara javio se i najveći pomak u iznosu od 0,19751 metar ili 19,751 centimetra na dubini od 2,5 metra.



Dijagram 16. Pomaci u smjeru x

Tablica 4. Prikaz dopuštenog i maksimalnog naprezanja

Okrugli cijveni profil fi 168,3 t =4,5 S355			
Dubina iskopa [m]	$\sigma_{maks}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{dop}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{dop}/\sigma_{maks}$
2	2,370447	23,7	9,998113
4	11,077653	23,7	2,139442
6	37,122420	23,7	0,638428

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{W}$$

$$A = 23,2 \text{ cm}^2$$

$$W = 92,4 \text{ cm}^3$$

Dubina iskopa 2 m

$$N = 3,171 \text{ kN}$$

$$M = 206,4 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{3,171 \text{ kN}}{20,09 \text{ cm}^2} + \frac{206,4 \text{ kNcm}}{108,7 \text{ cm}^3} = 2,370 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{35,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{1,5}$$

$$\sigma_{dop} = 23,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{dop}} = \frac{9,998 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{23,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 9,998113$$

U ovom je slučaju prekoračena vrijednost dopuštenih naprezanja pa je potrebno ojačati čelični nosivi element.

Dubina iskopa 4 m

$$N = 13,276 \text{ kN}$$

$$M = 970,7 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{13,276 \text{ kN}}{20,09 \text{ cm}^2} + \frac{970,7 \text{ kNcm}}{108,7 \text{ cm}^3} = 11,078 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{35,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{1,5}$$

$$\sigma_{dop} = 23,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{dop}} = \frac{11,078 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{23,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 2,139442$$

U ovom je slučaju prekoračena vrijednost dopuštenih naprezanja pa je potrebno ojačati čelični nosivi element.

Dubina iskopa 6 m

$$N = 35,983 \text{ kN}$$

$$M = 3286,8 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_{max} = \frac{35,983 \text{ kN}}{20,09 \text{ cm}^2} + \frac{3286,8 \text{ kNcm}}{108,7 \text{ cm}^3} = 37,122 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_{dop} = \frac{35,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{1,5}$$

$$\sigma_{dop} = 23,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{dop}} = \frac{37,122 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}{23,7 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} = 0,638428$$

Iz svega do sada prikazanog možemo doći do zaključka koja vrsta zaštite od ove četiri koje smo razmatrali pruža najsigurniju zaštitu na pojedinim dubinama iskopa. Prije svega moramo naglasiti da se AB piloti i dijafragma ponašaju vrlo slično zbog toga što se za izradu istih koristi armirani beton, s druge strane za izradu IPE 160 i okruglog cijevnog profila se koristi isti čelik (S355) pa se i oni ponašaju relativno slično. Kod svih navedenih zaštita različita je površina poprečnog presjeka te moment tromosti.

Za zaštitu iskopa od 2 metra dubine najbolje se pokazao okrugli cijevni profil jer su na njega na toj dubini za razliku od ostalih djelovala najmanja naprezanje te su se dogodili najmanji pomaci u smjeru osi x.

Za zaštitu iskopa dubine od 4 metra najbolje se pokazao također okrugli cijevni profil, do dubine iskopa od 4 metra javila su se najmanja naprezanje te je također i pomak u smjeru osi x bio najmanji od svih uspoređenih zaštita.

Za zaštitu iskopa od 6 metra više se nije najbolje pokazao okrugli cijevni profil nego dijafragma koja je za tu dubinu pokazala najbolja svojstva. Javila su se nešto veća naprezanja ali daleko najmanji pomak od svih ostalih vrsta zaštite koje smo uzimali u proračun.



## Zaključak

Cilj ovog završnog rada bio je upoznati se s pojmom savijanja nosača. Dan je pregled osnovnih vrsta savijanja u smislu vrste vanjskog djelovanja na nosač. Izrađen je numerički model za analizu konzolnog nosača zaštite iskopa građevinske jame. Korišteni su uobičajeni oblici konzolnih nosača koji se koriste u svakodnevnoj inženjerskoj praksi, kao što su čelični IPE profili, okrugli čelični cijevni profili, armirano betonska dijafragma te armirano betonski piloti. Uobičajeni postupaka pri projektiranju je da se na temelju rezultata provedenih geotehničkih istražnih radova izradi proračunski model tla. Tada se, na osnovu zahtjevane dubine iskopa i odabranog konzolnog nosača, provodi odgovarajuća numerička analiza. Njeni rezultati će definirati ponašanje pojedinih vrsta zaštita. Iz dobivenih rezultata provedenih analiza u ovome radu vidljivo je da postoji široki raspon dobivenih vrijednosti unutarnjih sila i horizontalnih pomaka pojedinog nosača za različite dubine iskopa. Generalno, rezultati provedenih analiza ukazuju da je poprečni presjek konzolnog nosača koji služi kao potporna konstrukcija pod djelovanjem složenog savijanja, odnosno istovremenog djelovanja uzdužne sile i momenta savijanja vrlo važan. S obzirom na tu činjenicu potrebno je koristiti odgovarajuće obrasce iz otpornosti materijala kako bi se mogla odrediti raspodjela unutarnjih sila u presjeku i kako bi se mogli provesti odgovarajući dokazi nosivosti poprečnog presjeka.

Potrebno je odabrati optimalno rješenje s obzirom na tehničke i gospodarske kriterije. To znači da će odabrana vrsta konzolnog nosača zadovoljiti kriterije čvrstoće, maksimalnih dopuštenih pomaka, uz minimizaciju troškova izvedbe s obzirom na količinu utrošenog materijala. Nakon svega navedenog može se zaključiti da se kod svakog odabira zaštite iskopa građevinske jame mora dobro razmisliti o sigurnosti, dimenzijama građevinske jame, svojstvima tla u kojem se vrši iskop, koliko je ekonomski isplativ projekt te provesti kvalitetni proračuni kako bi se osigurao odabir najbolje te najisplativije zaštite iskopa tla, kako se nebi dogodilo da se zbog uštede materijala ili bilo kakvih smanjenja troškova, smanji i sigurnost zaštite iskopa građevinske jame.

## Literatura

### KNJIGE I PRIRUČNICI:

Šimić, V. (2002): Otpornost materijala 1, 2. izdanje, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet u Zagrebu. Izdavač: Školska knjiga, Zagreb

Alfirević, I. (1989): Nauka o čvrstoći 1, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje u Zagrebu. Izdavač: Tehnička knjiga, Zagreb

Ivandić, K. (2019). Nastavni materijal za kolegij *Otpornost materijala*. Geotehnički fakultet u Varaždinu, Sveučilište u Zagrebu.

Džeba, I., Androić, B., Dujmović, D. (1998): Metalne konstrukcije 3, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet u Zagrebu, Izdavač: IA Projektiranje, Zagreb

### STRANICE NA INTERNETU:

Vnučec, Z. *Nuka o čvrstoći*, on line udžbenik, Sveučilište Josipa Juraja Strossmayera u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu. Preuzeto s: [sfsb.unios.hr/ksk/cvrstoca/web\\_cvrstoca/naslovnica.htm](http://sfsb.unios.hr/ksk/cvrstoca/web_cvrstoca/naslovnica.htm) (pristupljeno 3.6.2020.)